

Poznámky

prof. RNDr. Kataríny Cechlárovej, DrSc.

k jej ceste s matematikou

Narodila som sa v Prešove, kde sa usadili moji rodičia. Obaja pochádzali z Mikovej, vtedy ešte neznámej dedinky na severovýchode Slovenska, ktorá sa až oveľa neskôr stala slávnou ako rodisko Andyho Varhola. Päťdesiate a šesťdesiate roky neboli jednoduché, ale rodičia nám nikdy presne nepovedali, čím si museli prejsť.

Aj kvôli tomu sa možno u nás doma rozprávalo len po slovensky. Chodievali sme so sestrou na prázdniny do Mikovej, hrali sme sa s tamojšími deťmi, ale „bisiduvati“ sme nevedeli a pokúšať sa o to sme sa hanbili.

Mamka pôvodne absolvovala strednú pedagogickú školu v Medzilaborciach. Najprv učila na základe umiestnenky v akejsi dedine, kam ani autobus nechodil, po presťahovaní do Prešova v materskej škole. Pri dvoch deťoch vyštudovala Pedagogickú fakultu, odbor ruština-výtvarná výchova. Vo výtvarnom umení a práci s deťmi sa naozaj našla. Vymýšľala nové a nové aktivity: deti maľovali veľkonočné vajčička, vyfarbovali sadrové odliatky plastových servírovacích podnosov v štýle mandaly, vytvárali ozdoby z drôtikov, a občas aj diskutovali o maliaroch – veľikánoch. Celý vestibul školy bol vyzdobený jej maľbami na skle. Učila aj v hokejovej triede malých nespratníkov, ale vždy sa jej podarilo nájsť si k nim cestu. Bola neuveriteľne pracovitá, robila aj množstvo fyzicky náročných prác. Keď dnes namiesto umývania podlahy alebo pletia záhonov ideme radšej bežkovať alebo pádlovať, viem, že by to urobila za nás.

Ocko bol v širokej rodine považovaný za autoritu. Pracoval v zdravotníctve, a túžil po tom, aby



Prvý deň v škole

ho aspoň jedna jeho dcéra nasledovala. Asi bol sklamaný, keď som sa vydala inou cestou, ale po promócií bol na červený diplom veľmi pyšný.

Matematika mi vždy išla, ale to mi išli aj jazyky a sloh. Asi prvým dôležitým momentom pre moje budúce smerovanie bol fyzikálny krúžok pod vedením Mariána Olejára, ktorý som navštevovala dva roky počas základnej školy. Nevenoval sa experimentom, spomínam si, že sme napríklad počítali derivácie (bez toho, aby sme chápali, o čo ide). Ako siedmačka som vyhrala okresné kolo Fyzikálnej olympiády pre deviatakov, pričom v tejto kategórii vyššie kolo nie je. O rok som ale na tejto olympiáde celkom zlyhala – jedna úloha bola z optiky a jedna na rotačný pohyb, ani o jednom som nevedela nič.

Na gymnáziu v Prešove na ulici Tarasa Ševčenka ma učil matematiku profesor Ján Goliáš. Slávny slovenský spevák Peter Nagy chodil tiež na naše gymnázium, o ročník vyššie než ja, do triedy s humanitným zameraním. Neviem to isto, ale všetko nasvedčuje tomu, že práve pán profesor Goliáš bol predlohou jeho pesničky Profesor Indigo („chodí v modrom plášti a...“). Ja si z hodín matematiky dodnes pamätám, ako sme konštruovali rezy kockou a ako nám vysvetľoval zavedenie derivácie na grafe funkcie.



Maturitná fotografia z tabla

Počas štúdia na gymnáziu ma najviac ovplyvnili korešpondenčné semináre a sústredenia. Vo Východoslovenskom kraji sa najprv konali len raz do roka v septembri pre úspešných riešiteľov Matematickej olympiády v predošlom školskom roku. Bolo to asi v mojom druhom ročníku. Sústredenie na Ružíne bolo také skvelé, účastníci sme si tak dobre rozumeli, tak sme si mali každú noc až do rána o čom rozprávať, že v posledný deň navštívila vedúcich delegácia stredoškôľakov s tým, že my sa ešte musíme stretávať, a to častejšie. Ako stredoškôľáci sme nemali šancu vedieť, čo všetko bolo za organizáciou sústredení, napríklad kto a prečo to financoval, ale fakt bol ten, že naši vtedajší vedúci akosi našli spôsob, ako robiť sústredenia nie raz do roka ale trikrát. Účasť v nich si bolo potrebné vybojovať nielen na krajských kolách olympiády, ale riešením úloh v korešpondenčnom seminári, trikrát v troch sériách. Postupne si

vlastné korešpondenčné semináre a sústredenia vytvorili aj ďalšie kraje Slovenska pre rôzne vekové kategórie a pod rôznymi názvami, dokonca sa objavili aj v Česku. Odkukať, ako to u nás robíme, bol aj Honza Kratochvíl, neskôr dekan pražského Matfyzu

Okrem získania kamarátov s podobnými záujmami (veď to je jasné aj dnes: žiak, ktorý sa dobrovoľne venuje matematike aj navyše oproti školským povinnostiam, je v triede dosť samotár) mali sústredenia aj vedľajší účinok. Zamilovala som si turistiku, ktorá sa u nás v rodine nepestovala. Aj celoštátne sústredenie pre riešiteľov Fyzikálnej olympiády v Českej Lípe s iným kolektívom vedúcich a účastníkov malo bohatý športový program - prvý týždeň sme každý deň po prednáškach urobili zo dvadsať kilometrov po okolitých horách. Druhý týždeň sme už na veľké sklamanie vedúcich radšej hrali volejbal. Sústredenie zorganizovali aj stredoškólači v Bílovci. Pozvánka mi prišla neskoro, lebo na východnom Slovensku boli jarne prázdniny. Dnes sa čudujem, ako ma moji inak prísni a opatrní rodičia posadili do vlaku s cieľovou stanicou neviemkde a príchodom tam neskoro v noci... Neskôr nenamietali ani proti tomu, že sme po maturite traja Prešovčania, Peťo Vojtovič, Braňo Jurčo a ja, išli tri dni z Prešova pešo na sústredenie na Čingove. Tieto semináre a sústredenia, kam chodievali aj Bratislavčania, vtedy nadšení z pedagogiky profesora Víta Hejného, rozhodli, že som definitívne uprednostnila matematiku pred fyzikou..

Na vysokoškolské štúdium som sa hlásila na Matfyz do Prahy. Cez prázdniny som dokonca robila v Prešove poštovú doručovateľku, aby som čím skôr držala v rukách papier o prijatí na vytúžené štúdium. Aj som si obálku otvorila hneď za svojím pracovným stolom na pošte a tam: neprijatá pre nedostatok miesta. Bolo to nepredstaviteľné sklamanie, veď každé kritérium na prijatie bez prijímačiek som minula o chĺpok: nemala som počas štúdia samé jednotky, ale jednu dvojku z chémie, nebola som v šestici víťazov celoštátneho kola Matematickej olympiády, ale až na siedmom mieste... Navyše, nebolo jasné, čo sa deje – nedostatok miest za tým určite nebol, žeby to, že môj otec spieva v cirkevnom speváckom zbore gréckokatolíckej cirkvi? Čas ale ukázal, že asi všetko bolo tak, ako byť malo.

Vtedy bolo dovolené podať si len jedinú prihlášku a po prípadnom negatívnom rozhodnutí požiadať o jej presunutie inam. Prišla som na prijímačky na UPJŠ do veľkej posluchárne plnej študentov (to bola takto dehonestovaná kaplnka na Park Angelinum, dnes moderne a dôstojne zrekonštruovaná študovňa) a tam ma vyhľadala vtedajšia vedúca študijného oddelenia,



Brigáda po maturite na pošte

legendárna pani Ďurove: vy prijímacie skúšky nemusíte robiť, urobili ste ich výborne v Prahe...

V prvom ročníku na UPJŠ v Košiciach som bola spočiatku veľmi nešťastná, lebo všetci moji kamaráti boli v Prahe alebo Bratislave. Veľmi mi pomohlo neskutčné nasadenie učiteľov, ktorých som už poznala zo sústredení. Okrem toho, že nám prednášali a cvičili, správali sa ako kamaráti a dokonca pre nás organizovali popoludňajšie semináre mimo štandardného študijného programu. Brali nás na letné pionierske tábory mladých matematikov pre deti zo základných škôl ako „pomocných vedúcich“: Boďa Mihalíková, Peťo Mihók, Janko Ohriska, Maťo Gavalec, Stano Jendroľ, Marián Trenkler, Maťo Harminc, Gabika Andrejková a ďalší.

Aj štúdium bolo čím ďalej tým viac fajn. Bolo to niečo celkom nové. Ako stredoškolačka som poriadne netušila, čo vlastne je matematika. Na olympiádach a v korešpondenčnom seminári sme riešili ťažšie úlohy, než tie bežné školské. Tie nevyžadovali len počítanie, ale bolo treba aj vysvetliť svoje riešenie, v určitom zmysle aj dokazovať. Na výške to ale bolo predsa len niečo úplne iné. Definícia, veta, dôkaz, ale aj počítanie stoviek determinantov, derivácií, integrálov... Ja som chcela študovať matematiku, lebo som si myslela, že sa ju netreba učiť, stačí jej rozumieť, a ono to bolo inak. Dnes sa snažím pripomenúť si svoje začiatky na fakulte, aby som lepšie pochopila, čo prežívajú študenti v prvých ročníkoch štúdia. Spomínam si napríklad na profesora Bukovského, ktorý patril už vtedy k takým autoritám, ku ktorým sme vzhliadali s posvätnou úctou. Hovoril nám, že učiteľ musí byť aj komediant: možno si vetu XY zapamätáme vďaka tomu, že Bukovský pri jej prednášaní preskočil stôl... A ešte nám hovoril, že „*len volovi je všetko jasné!*“. Vtedy som si však viac myslela, že sa treba naučiť odprednášané, prepočítať dosť príkladov na získanie rutiny. Poznanie, že aj ja sama môžem tvoriť nové veci v matematike, prišlo až neskôr. Od prvého ročníka vysokoškolského štúdia som sa podieľala na opravovaní úloh korešpondenčného seminára, príprave a organizácii sústredení pre stredoškolákov. Dlhochizné debaty sme venovali príprave programu. Urobila som prvý počítačový program na zostavovanie poradia v seminári na základe získaných bodov. Bolo to ešte na diernych štítkoch a na počítači TESLA, ktorý vtedy zaberol jednu celú klimatizovanú miestnosť. Viedla som matematický krúžok na základnej škole v susedstve našej fakulty. Krúžky boli vtedy v stredy popoludní, ale to aj ideovo-politické vzdelávanie. Takže som pre neúčast' na ňom dostala pokarhanie. Bolo mi to jedno, zo školy ma kvôli tomu našťastie nevyhodili. Niekedy v tej dobe vznikla aj matematická súťaž vysokoškolákov, ktorá dnes nesie meno Vojtecha Jarníka. Konala sa na Matfyzě, bolo to tam zaujímavé, ale vtedy mi už Praha nechýbala. V Košiciach už bol

chalan, ktorý dal tomu celému ešte lepší zmysel. A k pešej turistike sa pridalo vodáctvo.



V kajaku na rieke Koritnica v Slovinsku, 2005

Bakalárky vtedy neboli, diplomovku som robila z Zermelovej teórie množín. Nebolo v nej nič prevratné, skúmala som rôzne verzie topológií na vzniknutom univerze. Dodnes hovorím, že klásť si otázky ma naučil môj školiteľ Peťo Vojtáš. Počítače a editory vtedy ešte pre obyčajných ľudí nexistovali. Prvé verzie mojej práce vznikali doslova štýlom, ktorý sa dnes volá CTRL+C, CTRL+V, ale s naozajstnými nožnicami a lepidlom. Prepisovať celé strany kvôli novej formulácii jediného riadka sa nedalo. Potom som si požičala z domu kufríkový písací stroj, kúpila balík kancelárskeho papiera a pustila sa do klepania. Dnes to už nepoznáme, ale preklep v poslednom riadku znamenal vyhodit' celú stranu a písať ju odznova. Balík papiera sa začal akosi rýchlo míňať, riadkovanie som z 1,5 postupne zmenšila na 1,0 a potom na 0,5... napokon som to dala. Ostalo ešte ručne dopísať zátvorky do všetkých piatich kópií, lebo môj písací stroj nemal znaky „(“ a „)“, len obyčajnú lomku. Pritom značnú časť mojej práce tvorili zložené výroky s kvantifikátormi typu (pre každé x)(existuje y) atď. alebo (existuje x také, že)(pre každé y) atď. Posudok profesora Bukovského ma vystrašil, lebo obsahoval tvrdenia ako napríklad „Veta 3.5. *nie je pravdivá*“, „Veta 5.2. *nie je pravdivá*“. Preberala som tie vety a ich dôkazy, hádam stokrát, ani môj školiteľ nevedel nájsť chybu... Na obhajobe sa pán oponent len lišiacky usmieval - problém bol s dopísanými zátvorkami v jeho verzii.

Keď sa blížilo ukončenie štúdia, začala som si hľadať prácu. Pre mladú osobu, ktorá bola navyše dobrou študentkou, to bola veľmi demotivujúca skúsenosť. Úrad

práce: teoretická kybernetika? Také pozície nemáme. Závod, kde bol vedúcim výpočtového strediska človek, ktorý nás na gymnáziu externe učil informatiku: „*Ja vás poznám, viem čo vo vás je, ale v našom závode je výpočtové stredisko prvé pracovisko, z ktorého sa prepúšťa.*“ Vysoká škola technická: zdvorilá, ale prázdna konverzácia s dôležitým profesorom, potom vyrozumienie o neprijatí a odkaz, že boli aj iní uchádzači, nech si svoj červený diplom... Napokon som dostala miesto na Katedre geometrie a algebry PF UPJŠ na zastupovanie počas materskej dovolenky. Nejakým zázrakom sa stalo, že som mohla ostať aj potom. Tou mamičkou bola Danka Studenovská, a v dňoch, keď píšem tento text, zdieľame spoločnú pracovňu a dlhé rozhovory o matematike a o živote.

V piatom ročníku som začala spolupracovať s Petrom Butkovičom na téme, ktorá sa týkala sústav lineárnych rovníc v extrémálnej, max-plus alebo max-min algebre. Na prvý pohľad vyzerajú rovnako ako tie, s ktorými sa študenti trápia na algebre v prvom ročníku, až na jeden detail. Namiesto plus sa píše \oplus a znamená to maximum, namiesto súčinu sa píše \otimes a je to súčet alebo minimum. Preto sú vlastnosti matíc a metódy riešenia sústav lineárnych rovníc celkom iné ako v klasickej lineárnej algebre. Jedným zo zakladateľov tejto oblasti bol profesor Ray Cuninghame-Green z Birminghamu v Anglicku, autor kľúčovej monografie Max-plus algebra. Do Košíc priniesol túto problematiku Karel Zimmermann, ktorý bol neskôr školiteľom mojej kandidatúry. S dvoma Petrami (Butkovičom a Szabóm) sme napísali článok o tzv. silnej regularite matíc, neskôr som sa venovala vlastným číslam a mocninám matíc v tejto algebre, s Jankom Plávkom máme článok o rôznych definíciách lineárnej nezávislosti a vzťahoch medzi nimi. V Košiciach naďalej pracuje v tejto problematike skupina na Technickej univerzite, patrili do nej aj Martin Gavallec, Blanka Semančíková a Monika Molnárová, dnes pokračujú hlavne Janko Plávka a Helena Myšková.

Ray Cuninghame-Green navštívil Košice najprv v roku 1985. Nakuknutie za železnú oponu bolo preňho dosť veľkým šokom, o mnohých zážitkoch mi rozprával ešte aj po rokoch. Po nežnej revolúcii mi pomohol v roku 1991 získať grant v rámci programu TEMPUS, o dva roky neskôr v programe PECO. Na Rayovej univerzite som strávila dvakrát po tri mesiace a naša spolupráca trvala ešte roky. Peter Butkovič od roku 1993 pôsobí v Birminghame a Ray navštívil Košice ešte niekoľkokrát.

Oba pobyty v Birminghame boli pre mňa pracovne veľmi obohacujúce. Pravidlá grantu z roku 1991 stanovovali, že ide o podporu výučby. Ray si dôsledne cenil pravidlá, a preto sme o žiaden výskum ani nezavadili. Väčšinu času som trávila v knižniciach, študovala rôzne učebnice, fotila „*test papers*“ a oboznamovala sa s organizáciou štúdia na britskej univerzite. Amazon vtedy ešte nebol, ani Internet, takže na základe donesených materiálov som potom v nasledujúcich rokoch vystavala svoje prednášky z teórie hier, mikroekonómie, matematickej ekonómie aj teórie systémov.

Pre nás bolo nezvyklé, že priebežné skúšanie na univerzite, ako ho poznáme my, tam neexistuje. V podstate prvé skúšky, navyše len písomné a s presne stanoveným termínom, sa konajú až po troch rokoch. Ich výsledok rozhoduje o ďalšom uplatnení študenta, preto mi Richard Atkinson, jeden z mála kolegov, s ktorým som sa mohla „normálne“ rozprávať, hovoril o prípadoch nervových zrútení študentov pred skúškami. Univerzitné zdravotné stredisko má lôžkové oddelenie, kde takých študentov hospitalizujú, ale aj tak musia robiť skúšky v určenom termíne, v nemocnici. Richard ma zobral aj na „*clock tower*“ v univerzitnom areáli. Pôvodne sa na vežu dalo chodiť bez obmedzení. Potom im z nej skočil nejaký študent, tak univerzita vydala nariadenie, že hore môžu chodiť len skupinky minimálne troch študentov. Tak vyšli traja a skočili spolu. Odvtedy bola veža zamknutá, ale Richard mal kľúče.

Ray sa staral aj o moju angličtinu. Počas obedňajších prestávok sme mali „hodiny konverzácie“ – jednou z obľúbených zábaviek bolo vysvetľovať po anglicky význam slovenských prísloví a porekadiel. Ja som tiež kvôli angličtine čítala všetko, na čo mi padol zrak. Tak som na jednej nástenke videla plagátik s informáciami, čo robiť v prípade „*sexual harassment*“ a vypytovala som sa Raya na význam toho mne neznámeho výrazu. V jednej z brožúrok pre zahraničných študentov som sa dočítala, že študent dostane víza aj pre členov svojej rodiny, ale študentka si musí vybrať, či sa bude venovať rodine alebo akademickej kariére. Ray to vysvetliť nevedel a pravda je taká, že s podobným prístupom som sa neskôr už na žiadnej zo svojich zahraničných ciest nestretla.

Osobne bol pre mňa tento prvý pobyt dosť ťažký. Každý týždeň som písala rodičom, každý deň telefonovala z búdky manželovi. Nejaké ženy na univerzite síce boli (sekretárky alebo upratovačky), ale kolegovia asi celkom dobre nechápali, čo tam robím ja. Veľmi nebolo okrem Raya a Richarda s kým rozprávať, a keď o mňa niektorí prejavili záujem, skončilo to takmer katastrofou. Jeden profesor ma tak dlho pozýval na večeru, až sa mi zdalo nezdvorilé odmietnuť. Večera v indickej reštaurácii bola síce dobrá, ale počúvať celý večer náreky anglického profesora, ako mu ženy, osobitne jeho bývalá manželka, ukrivdili, nebolo nič príjemné. Občas sa v mojej pracovni zastavil iný kolega, ktorý bol v Birminghame na akejsi stáži. Bolo to obdobie vojny v zálive, tak sme mali tému na diskusiu. Jedného dňa prišiel s tým, že toto je jeho posledný deň, tak by sme si mohli večer niekam vyjsť. Povedala som o tom pozvaní Rayovi, zaželal mi príjemný večer. Našťastie, susedka Amy z YMCA, kde som bývala, prišla ten večer akási rozladená – hovorím jej pod so mnou, prídeš na iné myšlienky. Keď sme sa na univerzite objavili dve, stážistovi doslova spadla sánka. Boli sme potom v akejsi krčme „na stojáka“ na pivo. Amy s ním zápalisto debatovala, ja som nerozumela nič. Keď nás potom vyložil z auta kdesi na autobusovej zastávke, Amy strašne nadávala, že tí ľudia si ženy vôbec nevážia, a že je strašne rada, že sa narodila v Anglicku, nie niekde na Blízkom východe. Na druhý deň som Rayovi rozprávala o tomto zážitku. Viditeľne mu odľahlo. Ty si vedel o čo

ide, prečo si ma nevaroval? Ja som si myslel, že aj ty vieš. Nuž, nemala som ako vedieť. Uvedomila som si však, že korektné vzťahy u nás doma, keď sa muži a ženy vzájomne rešpektujeme a často sme aj obyčajní kamaráti, nie sú samozrejmosťou. Aj dnes som skeptická voči všelijakým feministickým snahám, kvótam a podobne – ale to, že ich nepotrebujeme my, zrejme neznamená, že inde to majú ženy také „normálne“ ako my.

Druhý pobyt v Birminghame bol už zameraný na výskum. Vznikol náš spoločný článok *Residuation in fuzzy algebra and some applications* [ADC, 8] a ja som napísala *On the powers of matrices in bottleneck/fuzzy algebra* [ADC, 7]. Rukopis revidovanej verzie tohto článku zaslaný do časopisu však utrpel zranenie – na ktoromsi letisku sa obálka o čosi zavadila a roztrhala. Kým mi editor poslal poškodenú obálku späť a kým som ja poslala zásielku opäť, prešiel nejaký čas. Potom mi napísal Uri Peled z Univerzity of Chicago. Priznal sa, že bol recenzentom môjho článku, že spolu s A. O. L. Atkinom a Endre Borosom použili moje výsledky pre takzvané cirkulantné matice, a že by považovali za správne, aby som aj ja bola spoluautorkou článku [ADC, 10]. Uri potom využil svoju cestu na akúsi konferenciu v Európe na návštevu Košíc, a pre mňa to bolo opäť veľmi zaujímavé stretnutie s reprezentantom inej kultúry. Uri každú sobotu, nech bol kdekoľvek na svete, teda aj z Košíc, volal domov svojej mamičky v Izraeli. V tej dobe som napísala pár článkov o tom, ako študenti pracujú s negáciou a celkovo s kvantifikovanými výrokmi a s Urim sme diskutovali o tom, ako logiku chápe Biblia.

V súvislosti so skúmaním silnej regularity matíc v max-min algebre som navrhla spôsob, ako testovať, či priradovací problém daný štvorcovou maticou má je



Juan Enrique prispel k tomu, že som zmenila problematiku, na návšteve v Barcelone, rok 2017

diné riešenie. O tomto výsledku som rozprávala v roku 1986 na konferencii v Eisenachu vo východnom Nemecku, vtedajšej NDR. Táto konferencia patrila do série konferencií o matematickej optimalizácii, ktoré boli jedným z mála vedeckých podujatí, kde sa pred revolúciou mohli stretnúť výskumníci z Východu s kolegami zo Západu. Po mojom referáte sa prihlásil drobný nenápadný Španiel, či by som tento výsledok vedela získať pomocou lineárneho programovania. Nevedela som, ale jeho ten nápad zrejme zaujal. Až mnoho rokov neskôr mi Karel Zimmermann doručil krátky zaujímavý článok na túto tému od tohto Španiela. Dozvedela som sa, že sa volá Juan Enrique Martínez Legaz a je z Universidad Autónoma de Barcelona. Skontaktovali sme sa a začali pripravovať žiadosť o grant v rámci už neviem ktorého európskeho programu, zameraného na pomoc krajinám bývalého východného bloku. Od Juana Enriqua som sa prvýkrát dopočula o knihe *Two-sided matching* od Alvina Rotha a Marildy Sotomayor. Bola o teórii a algoritmoch stabilných párovaní. Samozrejme som ju nemala. Juan Enrique neváhal, knihu mi odfotil a poslal. V Barcelone som strávila mesiac v roku 1997. Ukázali mi tam dizertačnú prácu Antonia Romera Medinu. Ten riešil úlohu o vytváraní stabilných koalícií pri špeciálnych preferenciách. V nich každý hráč vyhodnocuje možnú koalíciu najprv podľa toho, akého najlepšieho spoluhráča v nej má, a ak najlepší hráč v dvoch koalíciách je rovnako preferovaný, tak je podľa neho lepšia koalícia s menším počtom hráčov. Postup, ktorý Antonio navrhol, bol na môj vkus veľmi neurčitý. Začali sme si písať, výsledkom bol vcelku jednoduchý algoritmus. Vtedy sme ešte nevedeli, že je už známy pod menom *Top-Trading-Cycles*, alebo TTC algoritmus. My sme ukázali, že je použiteľný aj pre našu úlohu o koalíciách, nie iba v takzvaných trhoch s domami, pre ktoré bol pôvodne navrhnutý. Spoločný článok [ADC, 16] nám vyšiel v roku 2000, ale s Antoniom som sa osobne stretla v Madride až o niekoľko rokov neskôr. Tento náš článok bol potom východiskom pre sériu ďalších prác o vytváraní koalícií s mojou doktorandkou Jankou Hajdukovou.

Napokon bol rok 1997 prelomový z dvoch dôvodov. Narodil sa Miško a ja som zmenila problematiku.

Dnes pracujem hlavne v oblasti, ktorá sa nazýva *Computational Social Choice*. Zdráham sa to preložiť do slovenčiny, lebo tu nemáme väčšiu komunitu, ktorá by sa dohodla na všeobecne akceptovanej a do určitej miery záväznej odbornej terminológii. Ide o oblasť, v ktorej sa riešia rôzne problémy pochádzajúce pôvodne z ekonómie, politológie a aj umelej inteligencie, metódami matematiky a teoretickej informatiky. K jej podoblastiam možno zaradiť napríklad priradovacie problémy, problémy delenia zdrojov alebo otázky súvisiace s voľbami. Okrem metód diskretnej matematiky, špeciálne jazyka a postupov teórie grafov sa občas vyskytnú napríklad aj teória miery a integrálu, existujú aj práce využívajúce formalizmus výrokového počtu. Cieľom je spravidla preskúmať problém tak, aby bolo možné navrhnúť efektívny algoritmus na overenie vlastností ponúkaného riešenia alebo na nájdenie riešenia s požadovanými vlastnosťami, alebo stanoviť obmedzenia pre

existenciu efektívnych algoritmov. Základným klasickým nástrojom je teória NP-úplnosti, ku ktorej pribudla teória aproximačných algoritmov s metódami dokazovania neaproximovateľnosti a najnovšie aj teória parametrizovanej zložitosti.

Počas jednej návštevy v Barcelone ma po mojej prednáške oslovil tamojší študent Matthias Dahm. Zaoberal sa článkom *On the Number and Size of Nations* z roku 1997 od významných ekonómov Alesinu a Spolaore. Ich model predstavoval svet ako jednotkový interval, občania boli body na tomto intervale a mohli sa spájať do „štátov“. Celkové náklady na spravovanie štátu boli nezávislé od jeho veľkosti. Takže náklady jednotlivca boli tým menšie, čím bol štát väčší, ale zase so vzdialenosťou od „hlavného mesta“ sa zvyšovali. Alesina a Spolaore vo svojom modeli ukázali, že efektívna štruktúra „sveta“ na jednotkovom intervale sa skladá z malého počtu intervalov rovnakej veľkosti. Ak však majú občania možnosť „hlasovať nohami“ a prejsť do susedného štátu alebo si dokonca vytvoriť vlastný, tento „*democratic process leads to an inefficiently large number of countries*“. Tieto svoje závery podporovali odkazom na dianie v Európe v deväťdesiatych rokoch. S Matthiasom a Vladom Lackom sme vytvorili alternatívny diskretný model, kde občanov je len konečne veľa a nachádzajú sa v izolovaných, rovnako vzdialených bodoch na priamke. Vyšlo nám, že aj v tomto prípade existujú aj efektívne aj stabilné konfigurácie, ale ich štruktúra môže byť oveľa bohatšia ako v pôvodnom modeli. S Matthiasom sme sa opäť stretli počas môjho Erasmus pobytu v Alicante v roku 2002. Vtedy pôsobil tam, dnes je profesorom ekonómie na univerzite v Leicesteri.



Na univerzite v Alicante, zľava Matthias Dahm, José Alcalde, K. Cechlárová, David Manlove, 2002

Ďalší podnet na výskum som získala počas pobytu v Madride u Antonia. Ukázal mi článok, ktorého autorom bol Antoniov kamarát José Alcalde z Alicante. Stručne povedané, problém stabilných manželstiev skúma existenciu, vlastnosti a vytváranie takých množín disjunktných dvojíc muž + žena (týmto dvojiciam hovoríme „manželské páry“), že na „manželskom trhu“ nevzniká „nevera“. Formálne, nevera zodpovedá takej nezosobášenej dvojici, v ktorej by boli obidvaja jej členovia radšej, než so svojimi manželskými partnermi. Stabilné manželstvá vždy existujú (myslí sa v teórii, nie v reálnom živote). Avšak variant úlohy, kde nie sú dve rôzne pohlavia, ale ide napríklad o vytváranie dvojíc do tenisovej štvorhry alebo posádok do dvojmiestnych kanoe, nemusí mať vždy stabilné riešenie. José navrhol definíciu výmennej stability, kde stabilitu nenarušuje vytváranie nových dvojíc, ale to, že dvaja účastníci, ak sa im to hodí, si môžu prehodiť partnerov. Mne sa podarilo ukázať, že rozhodnúť, či existuje výmenne stabilné párovanie v danej úlohe, je NP-úplný problém.

O tomto výsledku som napísala Robovi Irvingovi do Glasgowa, keďže je spolu s Danom Gusfieldom spoluautorom ďalšej knihy o stabilných párovaní, viac algoritmickej. Ozval sa Irvingov doktorand David Manlove – a to bol začiatok veľmi plodnej a inšpirujúcej spolupráce v oblasti stabilných párovaní. David si taktiež všimol, že model, v ktorom sme s Antoniom využívali TTC algoritmus, sa dá použiť v celkom inom kontexte. Pre pacientov so zlyhávajúcimi obličkami je nádejou na kvalitný život transplantácia. Obličiek od zosnulých darcov nie je dosť, a keď sa zlepšili operačné techniky a riziko zdravotných komplikácií z odobratia obličky sa minimalizovalo, živí príbuzní darcovia sa stali vítanou alternatívou. Často sa však stáva, že ochotný príbuzný je síce vhodný ako darca, ale z rôznych dôvodov nie pre zamýšľaného príjemcu. Vtedy je možné darovať obličku od darcu A pacientovi B a darca pacienta B môže dať svoju obličku pacientovi A, prípadne je možné vytvárať dlhšie darcovské cykly. Aj keď v medicíne sa táto myšlienka zrodila už v osemdesiatych rokoch, po roku 2000 sa ešte len rozbiehalo teoretické matematicko-informatické a algoritmicke štúdium tejto problematiky. Jej význam podčiarkuje aj udelenie „Nobelovej“ ceny za ekonómiu v roku 2012, keď sa jedným z jej laureátov stal A.E. Roth, významná postava tejto oblasti. Odôvodnenie tohto rozhodnutia je „*for the theory of stable allocations and the practice of market design*“. Párovanie darcov a príjemcov obličiek je určitým typom „trhu“, keďže ekonómovia nechápu trh len ako inštitúciu, kde sa niečo predáva a kupuje za peniaze, ale ako mechanizmus, ktorý vyhľadáva a priradzuje tých, ktorí niečo majú, k tým, ktorí to „niečo“ potrebujú. (Spomeňme si tu na „manželský trh“.)

Prvý článok [G1] s aplikáciami na výmeny obličiek sme napísali s Davidom a Tamásom Fleinerom z Budapešti počas jediného týždňa, keď bol Tamás na návšteve u Davida v Glasgowe a ja doma v Košiciach. Prezentovala som ho v jeseni 2005 na konferencii v Slovinsku. Ďalšie teoretické články na túto tému mám aj s dokto-

randami Vladom Lackom, Vierkou Borbeľovou a Diankou Plačkovou. Za oveľa dôležitejšie, aj pre situáciu na Slovensku, však považujem veľký európsky projekt ENCKEP z rokov 2016 – 2021 v rámci programu COST, kde sa stretli lekári, transplantálni koordinátori, ekonómovia, matematici a informatici, v diskusiách si vymieňali pohľady rôznych profesií a skúsenosti z rôznych krajín. Potom sme s Diankou, kolegynou štatističkou Maľkou Hančovou a transplantačnou lekárkou Táňou Baltosovou urobili simulačnú štúdiu. Modelovali sme náhodné príchody nových pacientov a zosnulých aj živých darcov do systému a modelovali, ako sa pri zmenách rôznych parametrov (intenzita príchodov darcov, zavedenie krížových transplantácií, uprednostňovanie pacientov s mnohými protilátkami pri pridelovaní darcov ap.) mení čas čakania na transplantáciu a pravdepodobnosť nájdania darcu pre rôzne skupiny pacientov.

Tamás mi prvýkrát napísal niekedy v roku 2002. Čítal v *Mathematical Reviews* moju recenziu prehľadového článku *The two-sided matching problem: Origin, development and current issues*, ktorý napísal jeden zo zakladateľov teórie stabilných párovaní David Gale. Tamás nevedel článok zohnať, preto ma poprosil o jeho kópiu. Tak začala naša dlhoročná úspešná a podnetná spolupráca. Predtým sme už s doktorandkou Vierkou Borbeľovou zovšeobecnilí stabilné párovania pre prípad, keď hráči v dvojici môžu vykonávať dve rôzne úlohy, napríklad pilot a navigátor v lietadle, zadák a háčik v kanoe. Pre tento prípad sme rozvinuli Irvingov pojem rotácie, ktorý umožňoval popísať celú množinu stabilných párovaní. Tamásova idea bola rozšíriť možnosti spolupráce dvojíc na viacero možných typov aktivít. Toto bolo modelované hranami medzi vrcholmi grafu (tie zodpovedali hráčom), a navyše každý hráč sa mohol zapojiť do viacerých aktivít s tým, že daný bol maximálny počet aktivít pre každého hráča zvlášť. Maďarská skupina je veľmi silná, takže postupne sa do spolupráce zapojili Tamásovi kolegovia Peter Biró, Ildikó Schlotter, Zsuzsi Jankó a Ágnes Cseh. S Petrom a Tamásom sme napísali článok o dynamických párovaniach, ktoré vznikajú pri postupných príchodoch hráčov. Ako perličku by som ešte spomenula článok Ceclárová, Fleiner, Jankó: *House-swapping with divorcing and engaged pairs* [C10], ktorý matematicky rieši problém výmeny domov v duchu filmu *Kulový blesk* (nápad nám posunul kolega Miro Ploščica). Z tohto filmu som nastrihala a otitulkovala asi päťminútový klip, ktorý som zvykla premietiť pred svojimi prezentáciami výsledkov článku, a vždy to malo veľký úspech.

Tamás je výborný v kombinatorickej optimalizácii, ved' pôsobí na univerzite, odkiaľ sú takí veľikáni diskkrétnej matematiky ako László Lovász alebo András Frank a doktorandské štúdium absolvoval u Lexa Schrijvera v Amsterdame. Preto okrem článkov o stabilných párovaniach máme spolu aj ďalšie práce. Tie využívajú väčšinou nejaký variant problému toku v sieťach a aplikujú ho napríklad na optimalizáciu práce osadzovacieho stroja alebo na priradenie oponentov k žiadostiam o grant. Na druhej z týchto tém sa podieľala aj moja doktorandka Evka Potpinková (po svadbe Oceláková).

Niekedy v roku 2004 som robila pre *Mathematical Reviews* recenziu na článok autorov Fekete, Skutella, Woeginger: *The complexity of economic equilibria for house allocation markets*. Vtedy som už o trhoch s domami niečo vedela (pravdaže nie ako realitná agentka, ale ako osoba pracujúca s TTC algoritmom). Autori ukazovali, že aj keď v klasickom Shapleyho-Scarfovom trhu s domami ekonomická rovnováha vždy existuje a TTC algoritmus ju rýchlo nájde, ak sú niektoré domy ekvivalentné, a teda musia sa predávať za tú istú cenu a agenti ich nerozlišujú, problém rozhodnúť o existencii ekonomickej rovnováhy je NP-úplný. V článku ma však zaujalo, že pri konštrukcii v dôkaze použili autori indiferencie v preferenciách. Na základe toho sme s Tamásom napísali článok [F3] o ekonomickej rovnováhe v trhoch s ekvivalentnými domami. Ak nie sú v preferenciách nad typmi domov indiferencie, rovnováhu vieme nájsť (alebo rozhodnúť o jej neexistencii) pomocou algoritmu na grafe. Ten opakovaním hľadá cyklové pokrytie v akýchsi orientovaných grafoch, kde vrcholy zodpovedajú typom domov a hrany agentom. Na druhej strane spektra, keď agenti majú takzvané trichotomické preferencie (rozlišujú len medzi žiadanými a neakceptovateľnými typmi domov a domami takého istého typu ako ten ich), NP-úplnosť sa zachováva. Túto tému sme potom rozvinuli v ďalších článkoch [F5, F6, F7] s Ildikó a s Evkou Jelínkovou z Prahy o aproximačné algoritmy a parametrizovanú zložitost.

V roku 2011 mi napísal z Atén Yannis Mourtos. Poznal moje články o perzistencii v kombinatorických optimalizačných úlohách, ale aj o párovaniach. Dôvod bol viac než dobrý: APVV a grécka grantová agentúra vypísali výzvu na bilaterálne výskumné projekty. Napísali sme spoločný grant a aj sme ho dostali, ale vzhľadom na prebiehajúcu grécku finančnú krízu sa začiatok projektu posunul. Na gréckej strane boli okrem Yiannisa ešte Pavlos Eirinakis a Dimitris Magos, u nás moja doktorandka Evka Potpinková. Medzi hlavné výsledky tohto projektu patria práce o Paretoovsky optimálnych priradeniach. Vedelo sa, že tie je možné získať sériovým algoritmom: hráči sú usporiadaní do nejakého radu, a postupne si každý ďalší vyberá najlepší objekt spomedzi zostávajúcich. My sme do tejto jednoduchej úlohy pridali štruktúru, ktorá bola motivovaná výberom krúžkov. Napríklad žiak si nemôže vybrať dva krúžky, ktoré sa konajú v tom istom čase. Alebo je pre každý krúžok určený poplatok a hráč má len obmedzený rozpočet, alebo sú krúžky rozdelené do viacerých kategórií a z každej kategórie si žiak môže vybrať len určitý počet. Vo všeobecnosti, dostali sme efektívny algoritmus pre prípad, keď prípustné množiny objektov tvorili dedičnú štruktúru, t. j. ak množina A je prípustná, tak je prípustná aj každá jej podmnožina. Druhý smer výskumu sa týkal prípadu, keď hráči mali neostre preferencie a teda výber najlepšej množiny v danom kroku nebol jednoznačný. Tu sme sériový algoritmus skombinovali s využitím tokov v sieťach, čo umožnilo nahradiť doteraz vybrané objekty inými, ale rovnako preferovanými. Tento výsledok sa podaril aj vďaka tomu, že v tom období sme mali bohatú cestovateľskú aktivitu aj v rámci európskeho COST projektu COMSOC, ktorý viedol Ulle Endriss z Amsterdamu, a preto

sa do práce mohli zapojiť aj Tamás a David, aj Davidova postdoktorandka Baharak Rastegari, pôvodcom z Iránu.

Slovensko-grécky projekt nám s Evkou umožnil navštíviť Atény, Akropolu, cez víkend sme zaleteli aj na Krétu pozrieť si Knossos. Moja príprava na projekt zahŕňala aj opätovné štúdium kníh Vojtecha Zamarovského. Pri prechádzkach po Aténach a rozmyšľaní o všetkých gréckych antických filozofoch a matematikoch mi nasakovala husia koža. Grékov sme zobrali do Tatier – tam sme zase my im spôsobili explóziu endorfínov. Pavlosa som poprosila, aby počas návštevy Košíc predniesol prednášku o gréckej finančnej kríze. Bolo to veľmi zaujímavé, Pavlos svoju prezentáciu obohatil aj o stručný prehľad histórie Grécka a vtedy som si uvedomila, ako málo toho o jeho domovine viem.

Moja doktorandka Janka Hajduková sa počas svojho doktorandského štúdia venovala problémom vytvárania stabilných koalícií. Keď k nám na ústav po absolvovaní štúdia nastúpila, zaujali ju problémy spravodlivého delenia. Spočiatku som sa k tejto téme stavala skepticky, ale pripadlo mi robiť oponentku jej diplomantke Evke Pillárovej. Matematický model koláča je jednotkový interval a hráči si rôzne cenia rôzne úseky tohto intervalu. V literatúre existujú viaceré algoritmy, od jednoduchého algoritmu „rozdeľ a vyber“ pre dvoch hráčov, cez jeho sofistikované rozšírenia pre rastúce počty hráčov, až po algoritmy s „pohyblivými nožmi“. Evka riešila problém, ako rozrezať koláč tak, aby každý hráč dostal jediný súvislý interval a aby vzniknuté delenie bolo spravodlivé špeciálnym spôsobom. Existuje viacero matematických definícií spravodlivosti, ona si vybrala takzvanú rovnostárskosť: vtedy si každý hráč myslí, že dostal takú istú hodnotu koláča ako si myslí každý iný hráč o svojom kúsku. Pre dvoch hráčov také delenie vždy existuje a Evka používala na jeho nájdenie iba jedinú operáciu: každý hráč mohol na určenom úseku koláča vyznačiť bod, ktorý ho delí na presnú polovicu z jeho pohľadu. Keďže hráči vyhodnocujú časti koláča rôzne, na základe vyznačených bodov sa postupne menili rozdeľované úseky koláča, a tento postup napokon konvergoval k „takmer rovnostárskemu“ deleniu. To znamená, že pre každé malé kladné epsilon sme sa vedeli dostať k takému deleniu, že hodnoty hráčov sa líšili najviac o epsilon. Zovšeobecniť tento postup na viac hráčov bolo problematické. Problémy robil prípad, keď niekto hodnotil interval nenulovej dĺžky nulou, bod delenia na polovicu nebol jednoznačne daný a nevedeli sme, či takéto delenie vždy existuje. Vtedy nám pomohol Jožko Doboš tým, že použil pojem zovšeobecnenej inverzie neklesajúcej funkcie. V časopise *Journal of Mathematical Analysis and Applications* nám článok odmietli na základe názoru jedného z recenzentov, že náš výsledok je triviálny, lebo ide o „fairly elementary consequence of induction, the intermediate value theorem, and well known properties of the quantile function“. Odmietli nám ho aj v *Mathematical Social Sciences* s tým, že článok je síce dobre napísaný, ale vzniknuté delenie nemusí byť „efficient“. Napokon vyšiel v roku 2013 v *Information Sciences* [E3] a asi to nie je celkom odpad, keď má dnes 29 citácií (podľa Google Scholar).

Takže existencia delenia pre ľubovoľný počet hráčov bola zaručená, ale ako ho nájsť? Evka chodila s novými a novými návrhmi na algoritmus, raz bol počet rôznych prípadov pre troch hráčov 18, potom 12, potom zase menej, ale ešte stále to nebolo dostatočne elegantné. Napokon sme navrhli pre ľubovoľný počet hráčov všeobecný algoritmus. Ten využíva, že deliace body síce nemusia byť jednoznačne určené, ale spoločná hodnota kúska koláča existuje a je jediná. Hráči ju hľadajú tak, že ju aproximujú pomocou jej binárneho rozvoja. Najprv prechádzajú jednotkový interval opakovane jedným smerom, odčítavajúc svoj úsek určenej hodnoty od značky predošlého hráča, v každej iterácii sa pridá alebo vyhodí ďalšia mocnina jednej polovice. Keď už sme spokojní s dosiahnutou presnosťou, vykonáme jeden prechod opačným smerom a body výsledného delenia sa nakombinujú zo získaných značiek. Článok obsahuje aj zaujímavý negatívny výsledok, ktorý hovorí, že žiaden konečný algoritmus nemôže nájsť presné rovnostárske delenie, už v prípade troch hráčov. Pre posledne spomínaný výsledok sme modifikovali dôkaz neexistencie konečného algoritmu pre tzv. *envy-free* delenie (ustálený slovenský termín neexistuje, snád by sme mohli povedať „*delenie bez závidí*“) Waltera Stromquista.



*Na seminári o spravodlivom delení, veľké postavy tejto teórie, 2016
Zľava Walter Stromquist, Michale A. Jones a Ariel Procaccia, Dagstuhl.*

S týmito páňom som sa stretla v roku 2016 na seminári o spravodlivom delení v Leibnizovom centre pre informatiku na zámku Dagstuhl v Nemecku. Problematika spravodlivého delenia je dnes veľmi živá, vzniká množstvo prác s mnohými autormi. Na svojej prednáške v Dagstuhle som sa zamyslela nad tým, čo by sa stalo, keby deliace body na intervale neboli ľubovoľné, ale bolo by možné vyberať iba z vopred

určenej konečnej množiny potenciálnych rezov. Toto viedlo k diskrétnemu modelu spravodlivého delenia, kde medzi hráčov rozdeľujeme množinu vrcholov grafu. Podmienka jediného intervalu pre hráča sa premietla do požiadavky, aby každý dostal súvislú množinu v zmysle teórie grafov. Spolu so Sylvainom Bouveretom z Grenoblu sme priamo na mieste našli dôkaz tvrdenia, že rozhodnúť o existencii spravodlivého delenia je NP-úplný problém už v prípade cesty. Následne na seminári v Budapešti sa k tejto práci pridala Edith Elkind z Oxfordu a jej žiaci Ayumi Igarashi (pôvodom z Japonska) a Dominik Peters (pôvodne Holandsko). Vznikol článok [E4], ktorý vyšiel v zborníku z konferencie IJCAI v roku 2017. V oblasti spravodlivého delenia to bola prvá práca, kde sa zaviedli vzťahy medzi delenými diskrétnymi objektami, pričom vzťahy medzi deliacimi hráčmi (napr. modelovaním ich interakcií na sociálnej sieti) boli skúmané už skôr. Následne sme so Sylvainom a Julienom Lescom (Université Paris Dauphiné) riešili obdobný problém, kde však objekty vo vrcholoch grafu boli nežiadúce [E5].

Na mítingu projektu COMSOC v Maastrichte mal zaujímavú prednášku profesor Friedrich Pukelsheim z univerzity v nemeckom Augsburgu. Rozprával o volebných systémoch pomernej reprezentácie. Špeciálne sa venoval pamätným voľbám do Bundestagu v roku 2005, keď na základe určitých udalostí niektorí voliči zistili, že ak chcú podporiť svoju preferovanú stranu, je lepšie voliť jej konkurenciu. Tento jav sa volá *no-show paradox*. Po návrate domov som náhodou objavila v denníku SME veľký rozhovor s prešovským politológom Vladimírom Dančišinom o pomernej reprezentácii a pozvala ho na prednášku. Vlado zistil zaujímavý jav: mohlo by sa stať, že presne v duchu nášho volebného zákona by mohlo po voľbách sedieť v našom 150-člennom parlamente až 260 poslancov. Je to také nepredstaviteľné, že môj manžel vďaka tomu vyhral fľašu šampanského. Pointa je v tom, aby niečo také nastalo, počet voličov zúčastnených na voľbách musí byť veľmi malý, Vlado tvrdil, že najviac 11 400. Ako to vieš? No, počítal som v Exceli a pre väčšie čísla to nevyjde. Bola to opäť zaujímavá konfrontácia s človekom s iným odborným pozadím – on sa uspokojil s experimentami v Exceli, ja ako matematik som chcela **dôkaz**, že pre **žia-**
den väčší počet voličov takáto patológia nemôže nastať. Napokon sa mi pre tú hranicu podarilo odvodiť pre viaceré metódy volebnej kvóty vzorec, ktorý používa len veľkosť parlamentu a rôzne typy zaokrúhľovania.

Zaujímavejšie bolo štúdium *no-show paradoxu*. Podarilo sa ukázať, že ak sa v metóde volebnej kvóty nezaokrúhľuje samotná kvóta, ale až počty kresiel získané predelením počtu hlasov kvótou, tento paradox nenastáva. Môj diplomant Richard Glankovič dokonca určil presné počty odovzdaných hlasov vedúcich k paradoxu a počty rôznych prípadov rozdelenia hlasov pre dve strany, kedy to nastáva.

Príprava publikácie napredovala pomaly. Článok nám najprv odmietli a ja som rozmýšľala, ako ho upraviť. Jedného dňa v januári prišla SMS správa: „Dobrý deň, chcela by som vám oznámiť, že môj manžel Vlado dnes ráno zomrel...“. Potom som sa dozvedela, že Vlado mal v lete bežať maratón. Jeho kamaráti dobehli do

cieľa symbolicky nesúc dres s jeho štartovacím číslom. Vladovi by som mala vziať hold aspoň dokončením článku, ale nenašla som dosť síl...

Myslím, že tu treba spomenúť aj práce s reálnymi aplikáciami. Moji kolegovia na ústave vedeli, že sa zaoberám teóriou priradovania študentov do škôl. Preto ma Lenka Halčinová skontaktovala s Katedrou pedagogiky na našej Filozofickej fakulte. Táto katedra má na starosti administráciu školských praxí študentov učiteľského štúdia. Na workshope v Budapešti som problém vysvetlila Davidovmu doktorandovi. Ian McBride ešte na mieste navrhol úlohu celočíselného lineárneho programovania a naprogramoval ju v softvéri od IBM. Počas jeho týždňového pobytu v Košiciach (opäť projekt COMSOC) sme ju vyskúšali na reálnych dátach. Dievčatá z Katedry pedagogiky boli nadšené, lebo namiesto dvoch týždňov práce mali priradenie za pár sekúnd. Tento variant priradovacej úlohy, kde treba každému študentovi prideliť cvičných učiteľov dvoch rôznych predmetov na tej istej škole, bol témou našich viacerých teoretických článkov s Tamásom, Davidom, gréckymi kolegami a Evkou Potpinkovou. Bolo však treba zabezpečiť aj to, aby program fungoval nezávisle od Iana. Verziu vo free softvéri potom naprogramoval v rámci svojej bakalárskej práce Miško Barančík a dnes sa o prevádzku programu stará Lukáš Miňo.

Ďalší podnet prišiel od Mariána Kireša, ktorý sa podieľa na organizácii Turnaja mladých fyzikov. Vymyslel, že by chcel pripravovať rozvrhy, ktoré sú férové špeciálnym spôsobom. V regionálnych kolách družstvá vopred nahlásia úlohy, ktoré budú prezentovať a cieľom bolo, aby sa počas turnaja so svojimi úlohami nestretli v pozíciách oponentov a recenzentov. Spolu s Ágnes a Zsuzsi sme navrhli úlohu celočíselného lineárneho programovania pre tento problém, Lukáš ju naprogramoval, urobili sme experimenty s reálnymi aj náhodne generovanými dátami a dievčatá doplnili niekoľko grafových algoritmov. Pred pár dňami vyšiel článok [H5] v *Journal of Scheduling* a Marián je šťastný, že aj v ďalšom ročníku turnaja mal férový rozvrh.

Pre moju matematickú „kariéru“ bolo rozhodujúce, že sa po nežnej revolúcii otvorili hranice, že môžeme cestovať a spolupracovať s matematikmi z celého sveta. Ak dobre počítam, zo zahraničia mám asi 25 spoluautorov z desiatich krajín, plus práce s mojimi doktorandami a diplomantami. Skutočne neoceniteľná je dnes možnosť využívať Internet a mať prístup k takmer akejkoľvek publikácii. Nikdy by som sa inak nedozvedela o množstve iných tém, nenapísala toľko článkov, nestretla s mnohými zaujímavými ľuďmi a nezískala toľko priateľov.