

Životopis prof. RNDr. Milana Hejného, CSc.

jeho vlastnými očami

**„Keď človek nájde zmysel v tom,
čo robí radosť aj ľuďom okolo,
má šťastný život.“**

Detstvo a mladosť

Narodil som sa 23. mája 1936 v Martine. To, čo teraz poviem, som zatiaľ nikde nehovoril, a ani sa na to nepamätám, ale keď som už mal trochu rozum, hovorili mi stará mama a rodičia. Bol som vymodlené dieťa, pretože som sa narodil nejak päť rokov po svadbe a rodičia sa veľmi usilovali. Stará mama, teda tá, čo je tam na tom obraze, dostala odo mňa meno Saminka (stará maminka). To už ju potom až do smrti takto v Martine volali. Tak tá mi dala strašne veľa do života. To hlavné, čo mi dala teraz, keď je už človek hodne starý a tie veci si dobre uvedomuje, je akési sebavedomie. Že som sa nebál ísť do nejakých sporov, keď som si myslel, že je to tak, ako som presvedčený. Že som nikomu neustupoval. Nie som hádavý človek, ale to sebavedomie, to som teda dostal, by som povedal, najmä od nej. Ona mala veľkú posteľ, ja som spával v tej istej izbe, ale na takom gauči. Teraz rozprávame o roku 1938/39, keď mi boli dva alebo tri roky. Ráno vždycky som k nej pribehol do postele, no to som mal asi dva roky, lebo som ešte nevedel poriadne rozprávať. Vo fíjoku¹ mala všelijaké lieky, ten fíjok som nazýval vraj čok, a keď som k nej teda pod tú perinu prišiel, chcel som čok. Ona vybrala lieky, a s tými liekmi sme sa všelijako hrali. Jedna z hier bola, že sme ich počítali. To „raz, dva, tri“, to ma naučila ona. Na túto vec sa samozrejme vôbec nepamätám, to len ako som to počul.

¹ fíjok, maď. – zasúvací priehradka, zásuvka, priečinok

A potom prišla škola. Tam ma v prvej triede učil pán učiteľ Valašťan, taký osvetový pracovník. On je uvedený aj v dejinách slovenskej hudby ako zberateľ piesní. Pamätám sa teda, ako nás učil pieseň „Vstávaj, Honzo, hore“. To sme spievali ako deti. To bola prvá, druhá trieda. V tretej triede nás prevzal razantný učiteľ Meško, ale pod ním som dlho nebol, lebo prišlo povstanie a išli sme do hôr. Ja som v tretej triede de facto nechodil do školy. Až potom po vojne, keď sme sa presťahovali do Prahy, už som išiel rovno do štvrtej triedy. Trochu som po česky vedel, lebo otec mi čítal rozprávky Boženy Němcovej, ale naši ma dali hneď do anglickej školy. Bola tam, kde je teraz Národní třída, ten veľký obchodný dom na Charvátovej ulici. Škola je samozrejme dávno zbúraná. Tam som bol ako žiak veľmi neúspešný. Boli to dve paralelné triedy, jedna s vyučovacím jazykom anglickým, a tí žiaci, ktorí chceli, sa mohli učiť aj češtinu. My sme mali vyučovacím jazyk český a všetci sme mali povinnú angličtinu. A tej angličtiny tam bolo vtedy hodne. Tak vlastne som začínal s češtinou ako skoro s cudzím jazykom. Pokiaľ ide o pravopis, no tak určite ako s cudzím jazykom. Moje výsledky v škole boli veľmi chatrné, aj vrátane matematiky. Ale matematiku som nemal rád, hoci ten učiteľ, čo nás učil, pán učiteľ Šampalík, bol vysoko kvalitný ako človek. Avšak učil transmisívne. Učil tak, ako sa vtedy vedelo, že sa má učiť, proste biffovanie. No a mne tie spoje nešli. Nieže násobilka, ja som mnohé spoje v sčítalke nevedel!

Ale už keď som začal chodiť do prvej, druhej triedy, otec mi dával také všelijaké úlohy, skôr kreslené a manipulatívne, a tie sa mi veľmi páčili. Hoci sme mali na seba vlastne iba nedeľné ráno, lebo on ako Čech nemohol učiť v meste, kde žije jeho rodina. Pretože na slovenských školách nebolo učiteľov, otec dostal pardón, ktorý sa týkal všetkých Čechov. Ale súčasťou toho bolo obmedzenie. Že to musí byť aspoň, ja neviem, dve hodiny vlakom alebo tak. No a on učil takto v Nitre. Takže prišiel v sobotu navečer, to sme ho išli s mamou čakať na stanicu, a po nedeľnom obede odchádzal. Tak v nedeľu dopoludnia sa mi venoval, to už si nepamätám koľko, ale viem, že som sa na to tešil, to som mal rád. Tam vlastne začali aj tie veci, ktoré teraz nazývame matematické prostredia. Keď som teda v Prahe chodil dva a pol roka do školy a prišiel tzv. víťazný február 1948, tak nás odlifrovali späť do Martina. Otec mohol učiť na škole, pôvodná Obchodná akadémia sa premenovala na Strednú ekonomickú školu, a ja som chodil na mešťianku. Vtedy bola tá Nejedlého idea jednotnej školy, že sa školy nebudú nejako

rozdeľovať na také, či onaké, však bude jednotná škola. Jednotná škola je jeden zo základných princípov každého totalitného režimu.

Keď sme už boli v Martine, tak otec mal na mňa viac času, a pokračovali sme v tej matematike. Pokračovali sme v nej tak, že mi vždycky dal nejakú úlohu. Tam už si na niektoré úlohy pamätám. Pamätám si napríklad, že mi dal Bydžovského Zbierku úloh. Dodnes ju mám. Tam mi ukazoval niektoré úlohy, že toto je zaujímavá, aj tamto je zaujímavá úloha. No a keď som niečo vyriešil, alebo keď som nevedel niečo riešiť (na to, čo teraz hovorím, si nepamätám, ale v jeho záznamoch to je), on hľadal úlohu, ktorá bola trochu ľahšia, aby mi pomohla. Teda to, čomu dnes hovoríme gradované úlohy, gradovaná séria úloh. Pamätám sa, že tie úlohy z geometrie, geometrických konštrukcií, mi boli veľmi, veľmi blízke. A tam som trebárs vetu o obvodovom uhle objavil. Sám som ju objavil a mal som z toho ukrutnú radosť. Žiaden dôkaz, proste séria obrázkov. Ono to leží na kružnici, tak už som za ním bežal, že teda to takto leží na kružnici. Len sa pýtal, či som si istý. Ja som hovoril, že som si úplne istý a ďalej to nekomentoval. Mohol som mať nejak dvanásť alebo trinásť rokov, keď sa toto dialo.

My sme vtedy v tej meštianke, čo teraz odpovedá šiestej triede, začali zlomky, ale ja už som zlomky vedel. Teda nevedel som ich zapisovať, akože dve pätiny, to nie, ale že z koláča, z tyče. Proste, ten sémantický náhľad som do zlomkov mal, a tam sa to vlastne prevalilo. Na túto scénu si tak trochu pamätám. Ale pretože som ju už mnoho ráz rozprával, tak už človek nevie, či si pamätá to, čo vtedy bolo alebo to, čo rozprával. Pán riaditeľ Depieš bol trochu nešťastný, že som v tej matike taký slabší. Lebo môj otec bol jeho kolega, vtedy bola v Martine tá meštianka a ekonomická škola. To bola jedna budova, dve krídla tej istej budovy. Takže určite sa stretávali a muselo mu byť odíózne, že ja som vlastne vedel matiku na tú trojku. No tak som mal možno dvojku z milosti, to by som sa musel pozrieť na tie vysvedčenia. Hoci otcovi nikdy na známkach nezáležalo. Keď sme začali preberať zlomky, tak začalo sa to tým, že nám pán riaditeľ ukázal nejaké zlomky. Potom nám povedal, že teraz, čo nám povie, že je strašne dôležité. Ukázal nám sčítanie zlomkov a krížové pravidlo, a niekoľkokrát sme to precvičovali. Pre mňa bolo úplne záhadné, prečo sa to takto sčíta, tam vynásobí. Ja som nikdy tie pravidlá nevedel, ale sčítať tie zlomky som vedel. Keď som si to dal „na čokoládu“, „na tyč“ alebo na niečo podobné, tak som to vedel. Vtedy sa v sobotu ešte chodilo do školy, a bola to sobota, kedy nám povedal pán riaditeľ, že nám dá na nedeľu ťažkú úlohu, a dal nám sčítať tri zlomky. Polovicu, tretinu a šestinú. Ja

som si to na koláči predstavil, neviem, či som si to aj nakreslil. Naraz som videl, že veď je to vlastne tá jedna celá, tak som to aj povedal a riaditeľ bol prekvapený. Lenže myslel si, že som to niekde videl, a že si to pamätám. Avšak potom od pondelka ďalej, keď sme začali robiť porovnávanie zlomkov, rozširovanie a všetky tie veci, čo sa robia, tak ja som si vždycky k tomu kreslil obrázky. Len sa pamätám na jednu vec, ktorá ma hrozne prekvapila. Mali sme v triede takého jednotkára, proste žiaka, čo je stále naj. Vilo Pálka sa volal. Jemu tie zlomky robili problémy. To bola nejaká taká úloha, $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$, že či je toto viac alebo menej ako $\frac{7}{8}$, a on s tým nevedel pohnúť. Nevedel, ktoré pravidlo sa na to má použiť. Mne to bolo čudné, ja som mu to kreslil, ale on nechcel tie obrázky.

Potom sa ešte pamätám, ako sme raz niečo písali, a ja som ten test veľmi rýchlo a bezchybne odovzdal. Bolo to o zlomkoch, mal som tam tie všelijaké obrázky. Pán riaditeľ Pišenburg, taká majestátna figúra ako som ja teraz, nosil *hosentrágle*, ktoré si občas naťahoval. Keď si ich naťahoval, znamenalo to, že je v dobrej nálade. Ako deti sme vedeli, že keď prišiel, že tá hodina bude dobrá, že nebude žiaden tartas². Prišiel ku mne a hovoril: „Vidíš, Hejný, keď sa začneš učiť, ty to vieš.“ Vtedy mi tá veta pripadala veľmi smiešna, lebo ja som sa nič nezačal učiť, ja by som to ani nezvládol. Tak toto je môj najintenzívnejší matematický zážitok z toho prvého obdobia, kedy sa vo mne zlomilo to, že už nie som spoločnosťou vnímaný ako matematický outsider, ale že niečo z tej matematiky viem. Už aj spolužiaci to akosi vedeli. Potom sme boli na výlete na bicykloch, išli sme chytať rakov, a otec mi povedal, že pán riaditeľ Depieš mu niečo o mne hovoril. Depieš by za mojím otcom asi nešiel, keby tá správa nebola radostná. Že bol slušný človek, tak zrejme mu išiel to povedať, a neviem, možno sa otca aj na to pýtal, že ako sa teraz učím, že som tak rýchly. Či mu otec rozprával o tom, že matika sa má učiť úplne inak, ako sa učí, neviem. Možné to je.

No a potom, už keď prišla tá jednotná škola, tam som sa veľmi skamarátil s o rok starším Milošom Franekom. My sme boli vždy spolu, ja som veľmi o jeho prítomnosť stál, to bolo na gymnáziu. Vidíte, ten čas od šiestej triedy až po gymnázium, to bola tá jednotná škola. Miloš bol v tom ročníku, ktorý skončil septimu, a oktávu urobili cez prázdniny. To bol jeden taký ročník. A išli na vysokú školu. To boli také veľké kotrmelce vtedy. No on mi aj

² tartas – krik

úlohy dával, nejaké zaujímavé. Ja som sa tam mimochodom v druhom ročníku zúčastnil matematickej olympiády, tá vtedy začínala, a vyhral som krajské kolo, ktoré sa uskutočnilo na Drevárskej fakulte vo Zvolene. Tam som tiež po prvý raz poznal pána Cyrila Palaja. Učil nás obidvoch, mňa aj Miloša Franeka. Pán učiteľ Filip bol skvelý, ušľachtilý človek, ale tiež produkt toho transmisívneho vyučovania. Ale ja som mal akési výsadné právo nedávať pozor a veci si robiť podľa seba. Myslím, že veľmi ma nepúšťal k slovu pri tabuli, lebo asi mal strach, že tým, že do toho nejakým inak vidím a inak to porozprávam, že trochu popletiem slabších spolužiakov. Ja som to ale necítil ako ujmu. Filipovci nebývali ďaleko od nás. Tam, ako býval aj Petrikovič, bývali v jednom *baráku*. Keď som bol v kvinte, sexte, tak som tam bol dáko pečený – varený. On mal syna Mirka Filipa, a ten bol odo mňa o dva alebo tri roky starší. Oni boli muzikantská familia. Mirko študoval čelo, pán profesor hral na husle a jeho pani na klavír. Občas dávali také rodinné koncerty pre svojich kamarátov a ja som mal to šťastie, že som bol pozvaný tiež. Pani Filipová urobila bábovku, dostali sme čaj, a potom niečo zahrli, z Dvořáka alebo Mahlera, alebo z niečoho iného. To boli veľmi pekné chvíle. Ale ja som tam niekedy zostal dlhšie, aby som mohol s Filipom rozprávať o matematike. V tom individuálnom vzťahu on bol veľmi dobrý, či mu to môj otec povedal, či to bolo z neho, neviem, lebo on mi neprezradzoval veci. Bol mi takým „sparing“ partnerom, asi takým istým ako Miloš Franek. Nepoučoval ma, ale napríklad, to bolo asi ešte v škole, dal mi takú úlohu, ktorú som potom často dával iným ľuďom. Tá úloha znie takto: Obsah obdĺžnika je a krát b , to je predsa jasné. A pán učiteľ Filip sa pýtal: „Ako to dokážeš?“ Ja mu hovorím, že no tak, keď mám 3 krát 4, tak si to takto vynásobím. Filip: „No dobre, a keď máš, ja neviem, $\frac{5}{7}$ krát $\frac{12}{11}$?“ No, tak to musím ešte nadrobno nakrájať a spočítam. Filip: „No a keď máš $\sqrt{2}$ krát $\sqrt{3}$?“ a naraz som videl, tam vtedy po prvý raz, že pri iracionálnych číslach to neviem. Ja som už vtedy vedel, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo, a to bol taký muzeálny kus, že áno? Po nejakej dobe prišiel som s tým, že presne to dokázať neviem, ale s akoukoľvek presnosťou to dokázať viem, lebo tú $\sqrt{2}$, aj $\sqrt{3}$ viem vyjadriť zlomkom s veľkou presnosťou. Potom mi dal nejakú Holubářovu knižku, v ktorej bola teória rezov a tú som nepochopil. On mi to nevysvetľoval, povedal, že na to je ešte čas, že to ma na vysokej škole naučia. Avšak to moje stretnutie s iracionálnymi číslami je dosť podobné tomu, ako nás história učí, keď sa pytagorejci stretli s iracionálnymi číslami. Je to dosť podobné tomu citovému

rozčarovaniu, že tu je akási oblasť, ktorú ja vonkoncom neviem popísať! $\sqrt{2}$ je uhlopriečka štvorca, $\sqrt{3}$ je výška v rovnostrannom trojuholníku so stranou dva, keď ich takto dám, tak to má byť $\sqrt{6}$. Ale ako to dokázať? Ja som to chcel geometricky dokázať, ale vedel som, že ak to aj dokážem, tak sa ma potom pán učiteľ Filip spýta: „Ako je to $\sqrt{7}$ krát $\sqrt{17}$?“ A budem v kýbli. Ale napriek tomu som sa snažil, no neuspel som, a tak toto zostalo. Má to takú zvláštnu matematickú pachuť u mňa, že do tých iracionálnych čísel ja nie príliš dobre nazerám. Ale iné oblasti matematiky mi šli, trebárs vektorový priestor. Na škole sme robili klasickú analytickú geometriu, a pán učiteľ Filip mi zase dal nejakú knižku, kde sa hovorilo aj o vektoroch, tak som sa niečo z tej knižky naučil. Nie celkom dobre, lebo som si plietol viazaný vektor a voľný vektor. To mi nebolo jasné, ako to je. A toto, že som si to plietol, som zistil až na vysokej škole, keď sa to spresňovalo.

Potom som sa dostal aj na celoštátnu, československú matematickú olympiádu v Prahe. Tam som poznal Jožka Brodiho, Virsíka a ďalších ľudí. Napríklad aj Buchtu, ktorý sa neskoršie premenoval na Kovalského. Oni medzi sebou spomínali také veci ako napríklad matematická indukcia. Ja som nemal zdania, čo to je. My sme sa to neučili, tak mi bolo jasné, že oni toho vedia faktograficky ďaleko viac. Napriek tomu som bol medzi úspešnými riešiteľmi v tom celoštátnom kole, bol som na 21. mieste. Z hľadiska toho, že na pražský Matfyz prijímali 21 ľudí, tak by som sa tam mohol dostať. Ja som ale nechcel ísť do Prahy. Mal som prihlášku podanú v Bratislave, a aj som chcel ísť do Bratislavy. Možno aj kvôli tomu, že Miloš Franek tam bol, a možno aj kvôli mame. Keď sme už poslali tú prihlášku, nejaký dávnejší otcov žiak prišiel mu povedať, že nebudem prijatý z kádrových dôvodov. Tak ho otec prosil, aby tú prihlášku tam stopol. On ju stopol a poslal som ju do Prahy, a oni ma pozvali na pohovory, lebo tam sa na tie kádrové posudky nejako veľmi nehľadelo. Tak som išiel do Prahy a prijímacie pohovory som „zvoral“. Ja som mal vždycky nejaké také problémy, neviem dobre prekonávať tlak skúšky. Ale zachránila ma jedna vec. Vtedy presadili, neviem, či to bol Nejedlý, či kto na komunistickej strane, že na české školy, konkrétne teda na Karlovu univerzitu je „*numerus clausus*“ pre Slovákov. Ten „*numerus clausus*“ boli traja ľudia, a my sme sa tam hlásili presne traja, takže im nezvyšovalo nič než toho neschopného Hejného vziať. Tí ďalší dvaja boli Juro Jirsík, ktorý potom dlho pracoval v Austrálii s Kluvánkom. Teraz je ten Juro Jirsík v Nemecku, v Dortmunde. Jožko Bródy, ten je teraz v Montreale.

Vysokoškolské štúdiá

Vysokú školu som absolvoval v rokoch 1954 až 1959. Zabudol som povedať, že sa mi podarilo aj zmaturovať. Tam najväčší problém bola pre mňa ruština, ale nakoniec som to zvládol. Spôsob vyučovania na vysokej škole mi veľmi nesesedel, najmä u niektorých skúšajúcich. Najhoršia pre mňa bola asi analýza. Geometria bola ďaleko lepšia, ale mal som tam jedného skvelého učiteľa Karla Havlíčka. On bol v tej dobe docent, pretože bol akosi politicky na tom zle. Ale neskôr ho „urobili“ profesorom. Na tej geometrii nás bolo 21 a boli sme rozdelení do šiestich špecializácií. Na tejto špecializácii sme boli traja. Dvaja Slováci, Jožko Brody a ja. A istý Herold, ktorý bohužiaľ chytil tuberkulózu a musel prerušiť štúdium. Neviem, čo je s tým človekom dnes. Štúdium geometrie, teda to „Havlíčkov“, to sa mi ohromne páčilo. On nerád skúšal, veľmi nás neskúšal, písal jednotky. Je aj jedna príhoda, ako sme robili u neho skúšku. Keď sa už blížilo skúškové obdobie, my sme u neho mali urobiť trebárs dve, niekedy aj tri skúšky. Tak vtedy mal šál okolo krku a proste fingoval, že je chorý: „*Vás tedy pánové, ja vás zkoušet nemohu, jo, nechte mi indexy u Šturma.*“ To bol vrátnik. Keby nám povedal „dejte“, že zapíše nám tie jednotky, tak by to bolo také... To by sa asi ekloval, ale my sme to nechali u Šturma. On tam prišiel a zapísal nám zase jednotky. Potom sme si išli k Šturmovi pre tie indexy. Takto to bežalo u neho. Samozrejme, že sme sa učili, pretože keď sme dvaja, tak sa nedá neučiť. Keď jeden z nás ochorel, tak sme mu telefonovali, že bohužiaľ prednáška odpadne, lebo 50 % je chorých. Tie jeho prednášky, cvičenia, z ktorých niektoré sa odohrávali vonku, že nás vzal a ukazoval nám románsky sloh, gotiku, ukazoval to prepojenie geometrie a architektúry. Vedel toho veľmi veľa, no a pri tom nám aj dával také kultúrne vzdelávanie okolo toho. Vedel o nás už po roku, že sme úplne spoľahliví, že na komunistov nadávame všetci spoločne, lebo vtedy to nebolo úplne jednoduché. Vtedy ste nevedeli, kto vás môže udať, ale takto sme si už úplne verili.

Ja som si v tej dobe ešte ani neuvedomoval, kde je slabina toho vyučovania, že sa naháňa technika a nerozprávajú sa myšlienky. Tie rozprával pán docent Havlíček už tým, keď nás vzal do chrámu sv. Mikuláša. Ukazoval, aké rôzne plochy tam sú, ako sa to robilo v tom ktorom storočí. Tak človek tú diferenciálnu geometriu naraz začal prepojiť s tým životom, ako to šlo. Keď bola objavená Dupinova indikatrix, tak bolo možné maľovať tie obrazy inak. Proste veľmi pekné to s ním bolo. Ale okrem neho tam bol i profesor Kessler.

Toho sme mali na komplexnú analýzu, bohužiaľ len jeden semester. On už bol starý, ale bol to veľmi kultivovaný človek. Dlho učil na gymnáziu, len neviem na ktorom. Myslím, že nie na pražskom, ale niekde mimo Prahy, a potom ho pozvali na Matfyz. On bol práve ten, kto akonáhle mu niekto niečo odrapkal, tak sa začal pýtať po podstate. Mal taký slogan, hovoril, že: „*pane kolego, to co ste řekl, to je pojmenovaná nevědomost*“. To bolo veľmi pekné slovné spojenie „pojmenovaná nevědomost“, lebo on chcel vedieť, ako to funguje. No a pravdepodobne poslední dvaja ľudia, ktorých skúšal, boli dvaja Milanovia. Môj spolužiak Milan Vacek a ja. Skúšal nás tak, že si vzal naše indexy, díval sa tam, čo a ako. Dal Vackovi nejakú otázku a ten začal rozprávať, odpovedal, odpovedal. Občas sa pán profesor na niečo opýtal, ale tak z diaľky, a Milanovi to šlo. Povedal: „*Jsem velice s vámi spokojen.*“ a do môjho indexu zapísal výborne. No my sme sa s Milanom na seba pozreli, ja som mu povedal: „*Dáš fľašku, ale keď nedáš fľašku, máš dvojku.*“ Ale tiež teda u Kesslera bolo veľmi ťažké dostať dvojku. To bolo skutočne veľmi ťažké. Aj u Havlíčka, tam ešte jednu príhodu s Havlíčkom poviem neskôr.

Profesor Kessler dlho hľadal, kde je hranica u študenta medzi tým „viem – neviem“. Tam, kde to bolo „neviem“, tak tam začal veľmi peknými otázkami hnať študenta do toho „viem“. Keď sa tam človek ukázal akosi dobrý, tak povedal: „*No tak, vy to vlastně víte, pane kolego.*“ a dal tú jednotku. Ale s Havlíčkom to bolo tak, že on nás nerád skúšal, ako som už hovoril, avšak raz nás vyskúšal, ale len raz. To bolo vtedy, keď nám v rámci deskriptívnej geometrie vysvetľoval Pelzove vety. Pelz bol český profesor, ktorý učil na nemeckej univerzite. V Prahe boli dve univerzity, Ferdinandova – nemecká a Karlova – česká. Mnohí ľudia učili tam aj tam, trebárs Pik učil na oboch univerzitách. Pelz učil na nemeckej, a tie svoje práce napísal v nemčine. Sú to veľmi duchaplné práce. Keď mám nejaký elipsoid, nejaké vajíčko a to je osvetlené z jedného bodu, tak tým priemetom, tým tieňom je elipsa. Ako sa nájdu ohniská tej elipsy? Dnes, keď už máme izotropické smery, tak to nie je ťažké, už to vieme nájsť. Ale on nám to ukazoval, ako to vlastne ten Pelz vymýšľal. Je tam mnoho krásnych trikov. Nám sa to páčilo, samozrejme sme sa to neučili. Prv sme to aj trošku chápali, že je to zbytočné, lebo vieme to inými metódami urobiť. Ale on nám zabudol povedať, aby sme nechali indexy u Šturma, takže sme za ním zašli. On sa na nás díva a hovorí: „*Hoši, ja vám sliboval, že vás někdy vyzkouším, ja vás dnes vyzkouším.*“ Ale my sme vedeli, že nič nevieme. Teda vedeli sme, že to nebude chcieť cez izotropné smery, že to bude chcieť tými Pelzovými vetami. My sme vedeli, že

to proste nevieme. Ale on nejako nediskutoval. Jednému aj druhému nakreslil teda tie tri osi. Mne to dal v kosouhle, jemu to dal v Mongeovej projekcii, v nejakých dvoch rôznych premietaniach. Každý sme to mali vysvetliť pomocou Pelzových viet. Otvoril knižnicu a odišiel. Tam som si naplno uvedomil, že keď mám k dispozícii akékoľvek ťaháky, jeho celú knižnicu, a nevidím do vecí, tak nič nevymyslím. Dohodli sme sa, teda hodili sme si korunou a vyšlo to na Jožka, že ako príde, tak mu povie, aby sa nehneval, ale že sme neprišli na skúšku, len sme si prišli termín dohodnúť. Že to nevieme. No on prišiel, pozrel jednému, druhému do papierov a Jožko nepovedal nič. Potil sa, dlane si utieral vreckovkou, obaja sme sa kukali na zem. Ale Havlíček mal nové topánky, a tie mu vŕzgali, keď chodil. Mal taký dlhý kabinet od dverí k oknu a späť. Potom zostal pri tom okne, díval sa a pohupoval sa na vŕzgajúcich topánkach. To bolo strašné. Zamyslene povedal: „*Kluci, kluci, vy víte, že já jsem dobrák, vy na to hřešíte, ale já se jednou naseru a začnu dávat dvojky.*“ A zapísal nám jednotky. No samozrejme sme si hneď išli odložiť tú ďalšiu skúšku, už neviem, čo sme mali, možno toho Kesslera, a nadrvili sme sa Pelzove vety. Teraz by som ich už dohromady nedal, ale keď som mal 55-ku, tak som to predvádzal profesorovi Recyklasovi, tak vtedy som to ešte vedel. Od profesora Vladimíra Koříneka som vyletel od skúšky z algebry. On chcel „základní věta dělitelnosti“. Ja som nemal potuchu, čo je to základná veta deliteľnosti. No a chcel som akosi z neho vypáčiť, čoho sa týka tá základná veta, ale on to nepochopil, on mnoho vecí výborne chápal, neveriteľne dobre, a niektoré úplne nechápal. Je známa príhoda, keď si nechal zaskliť okno, bol tam tiež nejaký poslucháč vedľa toho, ktorý videl nasledujúcu scénu. Mal tam zasklené okno, ten obchodník mu to tam dáva, on sa na to díva „*Jó (on tak zvláštne hovoril), a kolik platím?*“ Ten vytiahol tabuľky, ako násobilku a tú mal v centimetroch, ale čísla mal v korunách, takže to nebolo, že toto číslo krát toto číslo je toto číslo, čo profesor Kořínek nevedel. Kořínek si myslel, že je to tabuľka násobilky a on videl, že toto číslo sa končí trojkou, toto číslo sa končí ja neviem šestkou a ten súčin sa končil jednotkou. Tak mu Kořínek hovorí: „*Máte tam chybu!*“ a potom sa ho pýta: „*Co jste měl z matematiky ve škole?*“ Kořínek vzal okno pod pazuchu a bez platenia odišiel. Tak to je jedna z príhod, čo sa o ňom rozpráva.

No iná taká príhoda bola, keď vypukla kórejská vojna. Všetkých nás naraz nahnali do hlavnej posluchárne, a profesor Kořínek bol dekan. Prišiel a začal čítať: „*My, my profesori, do... profesori, docenti, učitelé, promiňte mi, ja to nepsal.*“ a plynule prečítal. Keď to dočítal, bol veľký potlesk. Nie

samozrejme na tú vojnu, ale na to, ako nás informoval. Tak to bol Kořínek. Tú opravu som potom u neho urobil za jedna. Takže hneď sa ma pýtal, a keď som dobre odpovedal, dal mi ešte nejaké, ja neviem symetrické polynómy, či niečo podobného a to som vedel, tak mi dal jednotku.

Keď som bol v piatom ročníku, tak som sa hodne zblížil s Petrom Vopěnkou. Petr Vopěnka študoval tiež v Ledči nad Sázavou, odkiaľ je moja pani manželka. On nebol príliš dostupný človek, ale dokonca na nejakej tej konferencii bol ochotný zdieľať dvojlôžkovú izbu so mnou. Mňa mal nejako rád, tak som sa s ním trošku viacej zoznámil. Prvý kontakt s ním, to si pamätám, bol vďaka problému súvisiacemu s Lebesgueovou mierou. Dá sa ukázať, že všetky racionálne čísla od nuly do jednotky sa dajú pokryť otvorenými intervalmi. Každý interval je otvorený a suma tých intervalov je nula. Teda ľubovoľne blízka nule. To mi vôbec nešlo do hlavy, ako to je. Petr tiež hovoril, že tam už vlastne začala jeho teória o monádach. Myšlienka siaha niekde do 16. storočia a v latinčine sa volá „angulusti contacta“, súvisí s pojmom dotykový uhol. Keď vezmem takúto kružnicu a dotyčnicu k nej, a pýtam sa, aká je miera tohoto uhla, tak euklidovsky nulová. Tu urobím ešte jednu menšiu kružnicu, takže medzi touto menšou kružnicou a touto je uhol, medzi touto a dotyčnicou je uhol a táto je ďalší uhol. Súčet týchto dvoch menších je ten veľký. Ale aké sú to veľké uhly? To bola tá otázka, ktorá v tom stredoveku vznikla. Je to nula, ale teraz prichádza tá Vopěnkova myšlienka. My do tej nuly vložíme celú ďalšiu os a tam sa vezme tiež nula a do toho tiež ďalšiu os. No a na to sa prišlo neskôr, keď sme už mali Taylorov rozvoj. Ak tie krivky rozvinem do Taylorovho radu, tak v prvom ráde sú rovnaké, ale v druhom ráde sú rôzne. Keby som tam začal brať teraz namiesto kružníc paraboly tretieho stupňa, tak v treťom ráde. Táto myšlienka, táto Taylorova myšlienka viedla Vopěnkou k zavedeniu takzvaných monád, čo sú infinitezimálne veličiny, ktoré môžu byť infinitezimálne infinitezimálne. Tam človek stráca akúkoľvek predstavivosť, tam sa musí spoľahnúť na nejaké abstraktné veci. A on potom ide do fenomenológie, teda do Husserla a Heideggera, kde sa hovorí, a to je vec, ktorú sme my prevzali do didaktiky, o horizonte alebo obzore. Pred horizontom je osvetlená časť sveta, za horizontom je neosvetlená. A to, čo sa deje za horizontom, o tom sa my tu môžeme dohodnúť, že za tým horizontom to bude tak a tak. Ale niekto iný sa môže dohodnúť, že to bude nejako inak. Pred horizontom medzi každými dvoma bodmi je stred. Ale my sa môžeme dohodnúť, že za horizontom to už platiť nebude. To je trebárs heker a ako úzko to súvisí s tou didaktikou

ukazuje nasledujúci experiment. V tom experimente som sa bavil s Aničkou, s tou mojou vnučkou. Bola u nás na prázdninách, keď mala sedem rokov (tak dajako), a aby našla dve čísla, dve nepárne čísla také, ktorých súčet je nepárny. Hľadala, hľadala, hľadala a neprišla s odpoveďou, že také čísla nie sú. Prišla s odpoveďou, to musia byť veľmi veľké čísla. Prišla s takou odpoveďou, že teda to môže byť za tým horizontom. V osvetlenej časti sveta to nie je. To mi je jasné, hej? No, tak to je len príklad, že uvažovanie o tom infinitezimálnom a to čo, s čím prišli fenomenológovia, že existuje akýsi horizont, a že my sa mnoho ráz oprávňujeme tvrdiť, že čo je za tým horizontom. Čo trebárs Bernard Bolzano si to neosoboval. Peter Vopěnka bol hodne veriaci človek, nedá sa povedať, že by bol veriaci katolík, on bol veriaci človek. A ten Bernard Bolzano bol pre neho veľký vzor, tak neviem či inde, než je to v jeho poslednej knižke, ktorú ani nedopísal, ktorá sa volá „*Množina N neexistuje*“, je zaujímavé uvažovanie. Ten hlavný argument tu je náboženský. Pretože akonáhle povieme, že N existuje, tak už siahame do kompetencie Pána Boha. To on si zapovedal, že to vie. Pre mňa je obzor, ja ho môžem posúvať za ten obzor, ale nemôžem povedať, že viem, čo je za tým horizontom. Neviem, čo je. Ako tá Anička, keď povedala, že... Iný jeho príklad je otázka, čo je po smrti. Smrť je pre nás horizont. Niektorí ľudia veria, že je tam posmrtný život, niektorí ľudia neveria. „Čo je pred stvorením?“ ... pred stvorením sveta, pred tým veľkým „búmom“, tak tieto otázky veľmi Petra vzrušovali. Úplne rovnako je to s Laci Kvaszom. Laci Kvasz má mnohé výhrady voči Vopěnkovi, keď s ním budete rozprávať, samozrejme ho uznáva, lebo mozog to bol veľký, ale niektoré veci vidí inak. Avšak aj od jedného, aj od druhého, to, čo som sa naučil, sa dá vložiť do didaktiky, a na rozdiel od nich, ktorí uvažujú o tom, čo sa deje za horizontom, ja tie deti mám pred horizontom. Ja na nich vidím, oni môžu rozprávať o svojom horizonte a treba ten horizont posúvať. Ale ten horizont je úplne neposúvateľný, pokiaľ sú tam skamenené fakty, že Pytagorova veta je toto, obsah trojuholníka sa vypočíta takto. Tým to končí, keď sa to takto povie, tak to už prestáva žiť. Stabilizuje sa horizont, to je skamenelina.

Po skončení vysokej školy

Hneď po vysokej škole v roku 1959 som išiel na vojnu. Na Strojníckej fakulte ČVUT v Prahe som bol polovičný asistent na Katedre deskriptívy u profesora Urbana. Vojnu som mal v Petržalke, v Bratislave „Na drátoch“. Protiletická obrana, pol roka to tam bolo. Môjho otca vtedy prekádrali a vyhodili. Šéf

katedry mi telefonoval, že nevie, či ma môže udržať. Profesor Urban bol taký bojzlivý človek.

V šesťdesiatom roku v auguste sme sa brali s mojou pani manželkou. Zuzka sa nám narodila v roku 1961. Nemali sme byt, preto to v Prahe vyzeralo s nami veľmi zle. Potom sa udiala zaujímavá príhoda. Vrátnik Šturm mal Slovákov veľmi rád. To sa prejavovalo tak, že nám dohadzoval dobré kondície. Zohnal kondíciu za 15 korún. Vedel, že máme dcéru, a vedel, že zháňame byt. Vtedy to bolo s bytmi tragické. Idem na seminár Ke Karlovu, kde bolo sídlo vrátnika Šturma. Šturm povedal, že má pre mňa byt, v Žiline. *„Podívej, ty im budeš rozumět.“* V Žiline dávali byty kvôli Vysokej škole dopravnej. Považské strojárne mali veľa majstrov, ktorí boli na vysokej úrovni, ale nemali vysokú školu. Keď tam príde dopravná, dostanú vysokú školu. Oni boli vplyvní ľudia. Skutočne sa tam začali byty stavať. Hovoril som Šturmovi v tej kukande, že sa poradím, či to vezmem. *„Jaké pak poradím? Nebud' vůl, někdo tě předběhne...“* Vzal cestovný poriadok a povedal *„... za dvě hodiny Ti jede rychlík“*. Ja som skutočne tým rýchlikom išiel a na fakulte v Žiline nás okamžite vzali. Kto tam prichádzal z Prahy, bol prijatý ihneď. Prišli ešte ľudia zo Zvolena a z ďalších miest. Tam bolo veľmi veľa mladých ľudí, preto to ovzdušie bolo veľmi dobré. Hneď sme si zaviedli seminár.

Neskôr som prešiel na Prírodovedeckú fakultu Univerzity Komenského v Bratislave. Na Prírodovedeckej fakulte dlhodobo ochorel Mišo Grajciar. Tak vedúci katedry, pán docent Milič Sypták, mi napísal, či by som nebol ochotný tam prísť. Vzhľadom na to, že som mal režinku, tak ma cesta Žilina – Bratislava veľa nestála. V tej dobe zo Žiliny bol so mnou ešte aj Tonko Dekrét, on potom prešiel do Zvolena. Spoločne sme chodievali na seminár do Brna, kde ho viedol profesor Oldřich Kowalski. Tam sme chodievali asi raz mesačne, už presne neviem s akou frekvenciou to bolo, a učili sme sa tam diferenciálnu topológiu. Ja som sa neskôr dal na didaktiku, Tonko zostal skôr u tej matiky, ale nie u Kowalského, ale u iného „Brňáka“. Kowalski sa presťahoval do Prahy. Potom ho viedol profesor Ivan Kolář, a u tohto profesora Tonko Dekrét urobil veľký doktorát. Vo veciach, ktorým som ani vtedy nerozumel, dneska tobôž. Potom sa situácia v Bratislave vytvorila tak, ako som už spomínal, že jeden kolega, čo tam učil striedavo diferenciálnu geometriu a analytickú geometriu, docent Mišo Grajciar – východniar, vážne ochorel, dlhodobo mal problémy s pľúcami, a šéf katedry docent Milič Sypták mi napísal, či by som nechcel tam zájsť. Vďaka tomu, že som mal režinku, tak som mohol raz do týždňa dochádzať do Bratislavy.

Mal som tam tuším šesť hodín, už neviem, ktoré predmety to boli, ale tie, čo predtým učil spomínaný Mišo Grajciar. Vtedy bol veľký problém s bytmi. Do Žiliny sme sa vlastne kvôli bytu sťahovali, lebo tam sme byt dostali. Ale ako viem, bolo to tak, že rektor univerzity mal nárok na pridelenie jedného bytu. Dotyčný si musel ten byt zaplatiť, ale boli to malé čiastky, aj keď tých, ja neviem 29 000 korún, čo sme vtedy za byt platili, bol ďaleko väčší peniaz ako dnes. Ale stále je to na dnešné pomery veľmi málo, dnes sú tie byty kruto drahé. My sme ale tých 29 000 korún nemali, avšak rodičia nám zapožičali tie peniaze, aby sme sa mohli sťahovať, tak sme dostali v Bratislave byt. Bolo to na Družicovej ulici.

Syn Miško sa nám narodil v šesťdesiatom šiestom. Bol veľmi maličký, možno ešte nemal ani rok, keď sme sa sťahovali. To znamená, že to mohlo byť v šesťdesiatom siedmom roku alebo šesťdesiatom šiestom roku, dáko na jeseň, pred školským rokom, keď sme sa sťahovali. Bolo to v lete, dobre si to pamätám. S tým sa spája aj taká úsmevná príhoda. Manželka už mala v podstate zaistené miesto, ona je zubárka. Vtedy ani v Žiline, ani v Bratislave nebolo veľa zubárov, takže pomerne rýchlo dostala veľmi slušné miesto na Kramároch. Ale bolo potrebné vyriešiť, čo s malým Miškom. A ešte sme to všetko ani nedostahovali, keď vtedy asi päť či päť a polročná naša dcérka Zuzka prišla s tým, že má tetu, ktorá bude Miška strážiť. Ona mala k Miškovi veľmi, veľmi blízko, a dodnes majú, chvalabohu, k sebe veľmi dobrý vzťah tie dve deti. No a skutočne tak bolo. Bola to pani, ktorá mala rovnako staré dieťa v tej istej dobe a žila v susednom baráku. Tak sme sa potom dohodli, a malý Miško rástol vlastne u nich, v rodine tej pani. Takže manželka pracovala na Kramároch a ja som učil. Hej, snažil som sa robiť vedu, diferenciálnu topológiu, z čoho som napokon urobil kandidatúru, docentúru. Z matematiky mám 16 publikácií. Pamätám si, že to číslo nebolo moc veľké. No, bolo to 16 publikácií, a mňa to veľmi vtedy ťahalo do tej matematiky.

Začiatky s didaktikou matematiky

Ale v 70-tom roku som začal s mojím synom. Vzťah, ktorý som mal s mamkou a s otcom, bol hodne odlišný. Moja mama ako herečka bola emotívny typ. Vo veľkej láske, ale občas aj v takej rose zúfalstva, ako už tí kumšteri bývajú. Ale otec bol úplne racionálny, veľmi vyvážený a veľmi vzdelaný človek. Od detstva ma vlastne kultivoval, kultivoval i ten môj intelektuálny rozvoj. To na mňa silno pôsobilo. Keď mal syn Miško tri alebo štyri roky, bývali sme v Bratislave a moji rodičia bývali v Martine. Samozrejme, že sme sa

navštevovali. Teda my ich, lebo oni auto nemali. My sme ich navštevovali, a ja som sa otca pýtal na mnohé veci, čo on so mnou robil, aby som to robil aj ja s Miškom. Miško bol ohromne ústretový. Jednoducho milé, zlaté decko, takže mi robilo veľkú radosť pripravovať pre neho všelijaké rozprávky na veľké rasy, tie som dostal z katedry. Boli to, myslím, oceľové konštrukcie, ktoré robili študenti z Vysokej školy dopravnej v Žiline. Veľké rasy, možno formátu A2. Mohli mať rozmery približne 80 centimetrov krát 120 centimetrov, možno ešte viac. Na druhú stranu som kreslil všelijaké príbehy, a to sa Miškovi ohromne páčilo. Asi hrozba, že zajtra žiadna rozprávka nebude, to bol pre neho najväčší trest, ktorý by mohol byť. Tým, že mne otec sem-tam dal nejakú radu a často sa ma pýtal, tak to viedlo k mojej inklinácii k didaktike. Avšak ja som to ešte v tej dobe tak nechápal. Ja som sám seba chápal ako tvrdého matematika.

A potom prišla jedna príhoda, ktorú dosť často spomínam. Bol už večer, ležali sme spolu v posteli, a tak sme si rozprávali, čo sa za ten deň odohralo. Mali sme hypotetického chlapca, nejakého Marka. Do neho som projektoval tie veci, ktoré Miško za ten deň zažil, a hodnotili sme, čo dobré sa stalo, čo zlé, čo sa dalo inak. On tento prístup mal veľmi rád. V tej dobe ale nerozoznával farby. To ma trošku akosi mrzelo. Farby nevedel, ale otec mi hovoril: *„Pozri, on nemá potrebu vedieť tie farby. On má inú potrebu. Má potrebu vedieť autá.“* A tie teda vo veku štyri a pol roka neuveriteľne vedel. Vedel, čo je trabant, wartburg, škoda, pobieda. Veľmi veľa tých názvov vedel. Hrávali sme takú hru, to mi tiež otec poradil, že keď sme išli po meste, tak on povedal „trabant“. Ja som povedal „hnedý“ a on zopakoval „hnedý trabant“. Tak takýmto spôsobom sme sa učili farby. Ale tá príhoda, o ktorej chcem rozprávať, pre ňu je toto len pozadie. Bola zima, takže sa stmievalo už veľmi zavčasu. My sme žili na zvýšenom prízemí a priamo pod oknami bolo malé parkovisko osvietené takou lucernou. Na tom parkovisku bolo „všeho-všudy“ šesť stanovišť a na nich päť áut. My sme si to s Miškom počítali – jeden, dva, tri, štyri, päť. Povedali sme si, že to je „hnedý trabant“, to je „červená škoda“. Ako tak ležíme a rozprávame sa, počujeme, ako jedno auto naštartovalo a odišlo. Tak sa Miška pýtam: *„Miško, a koľko je tam teraz áut?“* On si dal ručičku pred seba, päť prstov pred seba, chvíľu sa na to díval a opýtal sa ma: *„Oco, ktoré odišlo?“* Ja som sa pozrel z okna a popravde hovorím: *„Tá červená škoda“*. On pohlol ukazováčikom, chvíľu počítal a povedal: *„Štyri autá.“* A vtedy ma napadlo urobiť podvod. Znovu som sa pozrel a hovorím: *„Odpusť, Miško, ja som to poplietol. Tá červená škoda tam je. Odišla zelená pobieda.“*

A on si znovu dal tú ručičku, tentoraz pohol prostredníčkom. Čakal som veľmi rýchlu odpoveď, ale tá neprichádzala, čo ma veľmi prekvapilo. Zaspal, či čo? Nerozumel som tomu. Po chvíli, ale hodnej chvíli, on povedal, či skôr vykrikol s veľkým entuziazmom: „Štyri! Vždy to budú štyri!“ Keď som to otcovi rozprával, tak ma veľmi pochválil za ten podvod, čo som urobil. Bol to možnože jeden z kľúčových momentov toho, že som potom z matiky „prešantroval“ na didaktiku. Dal mi otázku: „No dobre, ale prečo tam ten chlapec tak dlho rozmýšľal?“ V tej dobe už mi čosi naznačoval o tých veciach, ktoré dnes nazývame izolované a generické modely. Už som mal o tom akýsi „tuch“, a tam sme o tom hovorili ako o univerzálnych modeloch. Mňa naraz napadlo, že Miško pomerne rýchlo prišiel na to, že aj teraz sú tam štyri autá. Ale táto myšlienka pokračovala ďalej, keď povedal: „No veď aj keby odišiel tamten trabant, aj potom by boli štyri.“ Že prišiel na to, že päť mínus jedna je vždycky štyri, bez ohľadu na to, ktorý prvok odíde. To mu tak dlho trvalo. Tak som to otcovi povedal, že podľa mňa to bolo tak, a on ma pochválil: „Áno, presne tak to bolo.“ Potreboval čas, aby sa z toho izolovaného – druhého izolovaného modelu prepracoval k tomu generickému modelu. Teraz nepoužívam našu vtedajšiu terminológiu, používam súčasnú terminológiu. V tom to bolo pre mňa veľmi poučné, len otec ma tiež pochválil: „Dobre, že si mu neskočil do reči, do myšlienok. Keby si bol netrzeplivý a skočil by si mu do reči, nič sa nedozvieš. Ale takto si zistil, že vlastne to dieťa sa dopracovalo pravdepodobne po prvý raz k hlbokému generickému modelu.“ Táto skúsenosť ma sprevádza celým životom, a preto hovorím učiteľom: „Buďte trpezliví, keď to dieťa hneď neodpovie. To neznamená, že nevie, čo sa deje. Možno, že v jeho mozočku prebiehajú procesy, ktoré, keď sa potom dostanú na svetlo sveta, vás udivia, že sú tie deti tak múdre. Buďte ticho! Ničím do toho nevstupujte!“ Toto bola príhoda, ktorá ma silno ovplyvnila. Asi v tej dobe som už začal vážnejšie koketovať o didaktike. Nieže by som chcel zanechať matiku, to v žiadnom prípade nie, ale že by som k tej matike pridal ešte aj didaktiku.

Paralela medzi fylogenezou a ontogenezou matematického myslenia

Jedna z otcových téz je, že medzi vývojom jedinca a vývojom spoločnosti je paralela. On to nazýval genetická paralela. Tá paralela nespočíva v tom, že to, čo sa odohralo v histórii, sa nutne odohrá v tom jedincovi. Ale základné štádiá, ktoré boli v histórii, sú aj v ontogéze. Preto história môže byť pre nás veľmi inšpiratívna. V tej dobe to pre mňa bola teoretická téza, pod ktorou

som si nič konkrétneho nevedel predstaviť, a tak som chcel po otcovi, aby mi to vysvetlil. Ale jeho vysvetľovanie, on bol konštruktivista telom a duchom, spočívalo v tom, že mi dal úlohu. Najprv sa ma pýtal, čo je vlastne pre to matematické myslenie rozhodujúce? Ja som si myslel, že pre matematické myslenie toho malého dieťa sú nejaké tri alebo štyri, dajme tomu, topologické homeomorfizmy a nejaké takéto vyššie záležitosti. No a on hovoril: „*No to sú, ale ty hovoríš o obsahu. Ja mám na mysli tie psychologické procesy, ktoré prebiehajú v hlave človeka.*“ Tak neviem zase, ako dlho to trvalo, či dve hodiny alebo dva týždne, keď som prišiel k nápadu, že ono to bude asi kauzalita. Je to schopnosť vyvodiť z nejakých zákonitostí inú zákonitosť. Tá kauzalita je tam podstatná. Otec povedal, že si to tiež myslí, a tak sa ma spýtal, ako vznikla kauzalita v ľudstve. To bola prvá otázka, prvá didaktická úloha a hádam najväčšia, ktorú som kedy dostal, ale rozhodne ma najviac ovplyvnila. Nevedel som ale, ako mám vlastne zisťovať tú kauzalitu v ľudstve. Vedel som, že história matematiky nás učí, že boli tie počítadlá do kosti vryté ako nejaké zárezy, ale ako ja tam nájdem kauzalitu? A otec mi povedal: „*No, to tam nenájdeš, musíš vziať písomné materiály. Musíš vziať Gilgameša a pozrieť sa, ako to tam je. Potom vziať trebárs Homéra, vziať Starý zákon, a kukat', ako tá kauzalita tam vyzerá.*“ Tak som sa do toho pustil a začalo ma to úplne fascinovať. Gilgameša som mal veľmi dobrého, v Zamarovského slovenskom preklade. Potom som si zadovážil ešte ruský preklad Gilgameša, a aj nemecký preklad. Ale nech som hľadal, ako som hľadal, v týchto spisoch žiadna kauzalita nebola. Bola tam taká trošku ukrytá kauzalita v prísloviach. Jedno z nich napríklad znie: „*Na malú nohu, malá topánka. Na veľkú nohu, veľká topánka.*“ Teda primeranosť. U nás taká kauzalita znie: „*Keď bojuješ pri stene, tak ťa neobklúčia.*“ To je návod – bojuj pri stene, aby ťa neobklúčili, že? A má to istý kauzálny charakter, ale nikde som tam nenašiel jasne, že udalosť *A* sa stala preto, že sa predtým stala udalosť *B*. To proste v Gilgamešovi nie je.

Otázka, ako vlastne v ľudstve vznikla kauzalita, je ťažšia ako parciálna diferenciálna rovnica. Musím dodať, že ja som ju nedoriešil. Je to otvorená otázka. Ja som ukázal ako od Gilgameša do Homéra, ako naraz tam vznikol skok. V Gilgamešovi žiadna kauzalita, v Homérovi rozvinutá kauzalita. No, ale čo bolo medzi tým, tak pravdepodobne na toto by sa odpoveď dala nájsť v Starom zákone, v niektorých jeho knihách. Neviem, či som sa vôbec k tomu hotoval niekedy. Určite ma to v dobe, keď som na tom pracoval, tieto veci vzrušovali, ale potom dáko už prišli iné problémy, iné potreby, a na túto

oblasť som zabudol. A ani neviem, či niekto na tom ďalej popracoval. Toto je vec, ktorá by stála za analýzu, a keby sa niekomu podarilo chýbajúce ohnivko kauzality medzi Gilgamešom a Homérom doplniť, tak možno, že by to bola vo filozofii docentská robota, to človek nevie. Rozhodne by som to považoval za veľmi dôležité.

Dobre, tak som siahol na Homéra. Slováci majú skvelý preklad Homéra, ale mal som aj český preklad, a z časti ruský preklad, ale ani to nebolo treba, lebo ten slovenský v tomto prípade úplne postačil. Oči som vyvaľoval, keď som zistil, že v Homérovi je tých kauzálnych väzieb hromada, a nielen kauzálnych väzieb. Tam sú kauzálne reťazce. Ten najdlhší reťazec, ktorý som tam našiel, som aj párkrát opisoval. Oni samozrejme tam sú. Lebo Gréci nepripúšťali, že sa veci môžu diať náhodne. Gréci pripúšťali len to, že ony sa dejú zákonite, a keď ty tú zákonitosť nevieš, tak je za tým nejaký boh, ktorý to zorganizoval. Čiže bohovia vstupujú do života Grékov ako tvorcovia kauzality. Tak napríklad, ale to nebudem dlho vysvetľovať, to sa niekde v tých mojich spisoch nájde. Vznik trójskej vojny začína tým, že na svadbu Thetidy a Pélea, ktorá sa konala na Olympe, nie je pozvaná bohyňa Eris. Eris bola bohyňa sváru. A keď si nepozvete bohyňu sváru na svadbu, to je celkom jasné, že nechcete tam mať hádky na tej svadbe. A teraz to príde. Ženskú nepozvú na svadbu, ona sa našťve – kauzálny nexus. Ženská je našťvaná, chce pomstu. Tú pomstu vymyslí tak, že medzi stolovníkov hodí zlaté jablko s nápisom „*Pre tú najkrajšiu*“. Každá z troch bohýň – Héra, Pallas Aténa a Afrodita, každá z nich si myslí, že ona to jablko má dostať. No a čo teraz urobí Zeus, na ktorého sa všetci dívajú? Zeus si je dobre vedomý, že nemôže ten spor rozhodnúť, lebo nech rozhodne akokoľvek, dve z tých bohýň budú proti nemu. Tak sa z toho vyvečie. Povie, že tam niekde v diaľke, v Tyrhenských horách je pastier, ktorý ešte nevidel ženu. Ale pastier nevie o tom, že je princ, pretože bol pastiermi nájdený v lese ako odložené dieťa. Ten nech to rozhodne. A to je potom ten známy príbeh. Každá tá bohyňa mu niečo sľúbi, čo patrí do jej referátu. Afrodita mu sľúbi najkrajšiu ženu. Pretože on mladík, po prvý raz vidí ženské stvorenie, je z toho paf a dá to jablko Afrodite. Ona musí splniť, čo sľúbila, dať mu najkrajšiu ženu na svete. Ale tou je Helena, manželka spartského kráľa Meneláa. Tak zosnuje pre tohoto Parida únos Heleny. On ako syn trójskeho kráľa Priama ju unesie do Tróje a z toho vlastne vznikne trójska vojna. Takže, keď si to spočítate, koľko je tam tých kauzálnych nexusov? Je tam deväť tých kauzálnych nexusov, že toto sa stalo, pretože sa predtým stalo toto, toto sa stalo, pretože sa predtým stalo toto,

čiže tá kauzalita tu je. Tú nás naučil Homér, Gréci nás ju naučili. Keď som s týmto za otcom prišiel, on bol z toho veľmi šťastný, že to je veľmi dobré. A položil takú otázku: „*Majú všetky tie kauzality tú istú podstatu? Logickú podstatu?*“ A už neviem, či mi to on naznačil, či ja som na to prišiel, skôr mi to on naznačil, že niektoré tie kauzality sú v poriadku. Keď žena nie je pozvaná na svadbu, tak sa našťve, to je jasné, to je dobrá kauzalita. Ale keď achájske vojská umierajú, tak je to dôsledok toho, že Apolón ich strieľa svojim šípom? To nie je pravda. Tie kauzality sú dvoch typov. Také, čo sú pravdivé, a také, čo nie sú pravdivé. Čo sú protetické. Prečo ich oni tam dávajú? No, pretože si nevedia to inak vysvetliť, a Grék, keď si to nevie inak vysvetliť, tak by prepadol hrôze. Aby tej hrôze neprepadol, tak si tam dosadí nejakého boha, bohyňu, a vysvetlí to všetko. Prinajmenšom sú to dva základné typy kauzalít. Prvý typ, nazvime ich typ prírodovedný, ktorý je založený na tom, že prečo sa búri more, prečo je neúroda, prečo vzniká sopka a tak. Tento prírodovedný kauzálny nexus bol Grékmi vysvetľovaný chybné na základe činnosti bohov. Ale potom je tam sociálny nexus, že keď niekoho našťvem, tak musím čakať odpoveď. To je správny nexus. No a potom zase tá otcova vec, tak dobre, ty si toto našiel v tej histórii. Ako je to teraz u tých ľudí, u tých žiakov, u tých detí? A to som pochopil, neskôr som si to zistil na tých svojich žiakoch, čo som začal učiť, že najprv sa dieťa učí sociálnu kauzalitu, lebo tú sa učí dobre. My tomu dieťaťu nevysvetľujeme prírodné úkazy pomocou bohov, my to vieme nejako vysvetliť. Ale tá sociálna kauzalita, tá je tam rozhodujúca. Rodičia s deckom jednú tak, že povedia, ak si tie hračky upraceš, tak ja ti večer budem môcť prečítať rozprávku, ak si ich neupraceš, budem ich musieť večer upratovať ja a nebudem ti môcť prečítať rozprávku. Tento kauzálny nexus, čo tomu dieťaťu odovzdajú, aj dodržia. Ak takýmto spôsobom jednáme s dieťaťom, tak sa dieťa učí v tej sociálnej oblasti kauzálny nexus. No a toto je skutočne tak, ja som si to potom na deťoch, ktoré som učil, preveroval. Tam, kde najmä mamky jednali s dieťaťom veľmi emotívne, tak to decko bolo na tom s tou matikou trochu horšie. Náhodou, sám som mal vlastne možnosť nad introspekciou na seba samom tieto veci pozorovať, lebo moja maminka, ako som už predoslal, bola herečka a emotívna, bola veľmi emotívna. Keď sa jej niečo darilo, všetko bolo pekné, a keď som niečo zlého urobil, nebolo to, čo som chcel, na to som mohol zabudnúť. Ak sa jej nedarilo, tak aj keď som niečo dobrého urobil, sa to stratilo. Našťastie, môj otec, ale aj moja stará mať to veľmi dobre vyvažovali, a v ich zápiskoch, ku ktorým som sa dostal, až keď otec bol na pravde božej, je pekne písané, ako on sleduje moju orientáciu, že

sa začínam vo veciach kauzálnych silne orientovať na neho a na moju starú mamu. To už som mohol mať tri roky nejako, teda iba tri roky a už som bol v tej dobe to dieťa, ktoré toto veľmi vycíti. Dneska tomu už na sto percent verím, pretože na tej našej pravnučke si to môžem odskúšať. Tam sa maximálne snažím kauzalitu takýmto spôsobom rozvíjať a myslím, že sa to deje úspešne. No, ja sa už nedožijem toho, aby som o tom mal jasný dôkaz, veď je už dospelá, ale som o tom presvedčený. Tak toto, čo som opísal, boli moje prvé zážitky s didaktikou matematiky pod vedením otca. Tam bolo hrozne dôležité, že on ma vôbec nepoučoval, on mi kládol len otázky a robil mi takého debatného partnera.

Výuka na ZŠ a vznik učebnice „Teória vyučovania matematiky 2“

Teraz budem pokračovať vo svojom rozprávaní, keď náš Miško mal päť alebo šesť rokov. Začínam sa trochu intenzívnejšie zaoberať vecami didaktiky a začína sa mi to páčiť. Predtým som sa díval na tie veci humanitné, že to v podstate nemôže byť veda. Teda jediná veda pre nás bola matematika. My sme boli tak vychovaní, že aj na fyziku sme sa dívali ako na remeslo, že to veda nie je. To bolo nešťastie tej výchovy a tej nafúkanosti matematikov. Tam som patril aj ja. Chvíľu to trvalo aj u mňa, než som zmenil názor. Možnože práve tieto príhody, ktoré popisujem, mi ukázali, že nielen tie výsledky, ku ktorým človek dospeje, sú hodnotné. Orientoval som sa na tú ontogézu a díval som sa, ako sa u detí vytvárajú kauzálne spoje. Vtedy som sa napojil na ruského bádateľa Alexandra Luriu. Luria mapoval kauzálne myslenie sibírskych kmeňov a tam sú veľmi zaujímavé veci. Vtedy mi už ani tak nešlo o tú históriu, ako mi šlo o tie decká, aby som im lepšie rozumel. A to je éra, kedy sme sa presťahovali do Bratislavy. Bývali sme v Ružinove, na Družicovej ulici, a ja som učil na Prírodovedeckej fakulte UK.

Moja angažovanosť smerom k didaktike sa prudko mení v dobe, keď Miško chodí do tretej alebo štvrtej triedy. Som nespokojný s tým, ako ho učia matiku. To, čo sa kedysi dávno odohrávalo so mnou, sa teraz v istom obmenení odohráva s Mišom. Školská matematika, kde som si myslel, že som slabučký, kde nič neviem, a tá matematika otcova, ktorá sa mi aj páčila, a v ktorej som bol dobrý. Podobne to bolo aj s Mišom, ale on bol aj v tej škole celkom dobrý. Ale občas ma vytočilo, ako pani učiteľka kládla dôraz na nepodstatnosti, na to, či žiak zachová dvojcentimetrový okraj od ľavého kraja zošita, či použije správnu farbičku, a nie na tú matematickú podstatu. To ma akosi hnevalo. Potom v štvrtom ročníku, myslím, že niekedy pred Vianocami,

Miško veľmi pekne vyriešil nejakú úlohu. Bohužiaľ si na ňu už nespomínam, vtedy som si ešte denník nepísal, takže tú úlohu neviem, ale na tom tak ani nezáleží. Ale Miško dostal za ňu päťku a dôvod bol, že použil žltú farbičku miesto hnedej a zelenú miesto červenej, či tak dáko. Tak to ma rozčertilo do biela. Našťastie skôr ako som pristúpil k nejakej vážnejšej akcii, som zatelefonoval otcovi do Martina, a všetko som mu to vylíčil. I môj zámer ísť do školy a nenechať tam kameň na kameni. Proste, ja si dieťa ničieť nenechám! A on v tej svojej hanáckej kludnej povahe sa ma spýtal: „*A tomu Miškovi pomôže to, čo urobíš?*“ Tak to bola blbá otázka, že? No, nepomôže, ale čo mám robiť? A on s rovnakým kludom odpovedal: „*Chod' ho učiť priamo Ty.*“ Vtedy sa mi zdalo, že je to úplná blbosť! Nikdy som neučil ani na gymnáziu, a nie ešte, aby som učil takéto malé deti, piatu triedu. Ale ten chrobák, čo mi dal do hlavy, ten začal vo mne hlodať. Uvedomil som si, že vlastne proti hlúposti niektorých učiteľov, je človek celkom bezbranný. Aj keď učiteľka uzná, že urobila chybu, nič to nepomôže. Ona sa lepšou nestane, tej matike nebude viac rozumieť, a nebude ani tie deti viac motivovať. Začal som koketovať s tou myšlienkou. Išiel som sa občas pozrieť nie do tej štvrtej triedy, v ktorej bol Mišo, ale aj do iných štvrtých tried ako to tam vyzerá. Potom prišiel okamih, keď som sa rozhodol, že možno by som to na rok skúsil. Už neviem, s kým som sa o tom rozprával a ten človek mi vtedy povedal: „*Ty to skúsiť nemôžeš, pretože ty nemáš na to pečiatku. Ty nemôžeš učiť na základnej škole. Ty môžeš učiť na univerzite, a keď prížmúria oči, tak na matickom gymnáziu.*“ Bol som z toho trochu akýsi nesvoj, nepozdávalo sa mi to. V tej dobe sme mávali semináre. Boli organizované v zborovni na Novohradskej, myslím v pondelky to tam bežalo, a chodilo tam hodne študentov. Taká tá súčasná elita ako je Vlado Burjan, Laco Kvasz a tak. Chodili tam aj žiaci, aj vysokoškolskí študenti. Pozývali sme hostí z Prahy. Bol tam František Kuřina z Hradca, z Prahy Zdeněk Helus, Jiří Mareš. Viacero ľudí tam chodilo z Čiech nám prednášať a bolo to veľmi skvelé prostredie. V rámci toho prostredia sa ma Vlado Repáš raz pýtal: „*Ty by si ozaj išiel učiť na základnú školu?*“ Hovorím: „*Išiel.*“ „*No tak pozri, ja ti to u Hotového zariadim.*“ Hotový bol vtedy riaditeľom základnej školy Košická. Košická a Novohradská, ako viete, to je jedna budova. Obidve zborovne, aj obidve riaditeľne sú prepojené jednými dverami, tam sa dá prejsť z jednej budovy do druhej. Keď som sa s Hotovým stretol, povedal mi, že hej, že on by ma vzal. Ja som sa ho teda pýtal, ale ako, že ja nemám na to pečiatku. Povedal: „*To, pán docent (či súdruh docent, ja už neviem, ako mi hovoril), nechajte to na*

mňa.“ Neskôr som sa dozvedel, že on sa poznal s námestníkom ministra. Toho pozval na pohárik, vypili si a ten námestník ministra mu povedal, že okej, že teda mi to povolia. Za predpokladu, že jeho neter bude môcť chodiť do tej školy. A Vlado Repáš povedal, že keď teda on ide do piatej triedy, tak ja si vezmem paralelnú piatu triedu, a neviem, či už v piatej triede alebo až v šiestej k nám ešte pristúpil Juro Vantúch. Na tie naše „sedánky“ chodil aj Ľudko Hrdina. Pamätám si, že v tom maličkom kabinete sme sa večer každý druhý deň alebo prinajmenšom raz do týždňa stretli, popíjali víno a diskutovali o tých didaktických veciach veľmi zápalisto, takže tam začala vznikať nielen akási teória, ale aj učebné materiály. To, z čoho dnes sú tie učebnice. Výhoda bola, že to bolo v silne kamarátskom ovzduší. Tam nehrozili žiadne peniaze, že by nám niekto niečo dával. Učil som tam úplne zadarmo, nebol som zamestnancom. To bola podmienka od riaditeľa, že ako zamestnanec tam nemôžem byť, pretože na výplatnej listine by sa pýtali potom, či mám tie pečiatky. Povedal som, že na tie peniaze kašlem, aj tak by to bolo pár halierov. Ja chcem len tie decká učiť. A tak som začal učiť tú piatu triedu s vidinou, že by som prípadne mohol aj šiestu ešte učiť, ale to nebolo v tej dobe isté. Písal sa rok sedemdesiaty piaty tuším a akonáhle sme začali robiť tie večerné „sedánky“ a o tých veciach debatovať, tak to na mňa silne pôsobilo. Myslím si, že tie materiály, čo sme vyrábali, boli celkom kvalitné. Zistil som, že sa potrebujem naučiť Kaláma, Piageta, Vygotského, Somlinského. Že teda ja som len odchovanec môjho otca, ale tú bázovú literatúru nepoznám. Bolšnieva povedzme tiež. Tak som to začal do istej miery „študírovať“. Otec bol ešte nažive, ale nie dlho. Asi jeden a pol roka potom, čo som začal učiť, odišiel. V tom začiatku som do triedy vstupoval s tým, že teraz z tých detí urobím olympionikov, že to bude matematický výkvet. To bolo moje presvedčenie a otec to nie veľmi vítal. Cítil som, že sa mu to moje nasmerovanie nepozdáva. Až tak, že mi dal jednu radu. On tých rád veľa nedával, ale túto radu teraz často uvádzam a píšem ju kdekade. Povedal: *“Hľad, aby Tvoja snaha urobiť z nich matematikov, neprevýšila Tvoju snahu urobiť z nich slušných ľudí.”* Toto bolo jeho. V tej dobe som si túto radu ešte tak plne neuvedomoval, ako si ju uvedomujem dnes. Čím som bol starší, tým ostrejšie vystupovala. Nakoniec som z nich tých veľkých olympionikov neurobil. Sú dobrí a mnohí sa živia matikou, a živia sa dobre, alebo niečím veľmi blízkym, ale to tu podstatné nie je. Podstatné je, že to boli slušní ľudia, a myslím si, že sú to aj teraz slušní ľudia. Medzi nami a tými deťmi došlo k veľmi úzkemu kontaktu, takému citovému, emotívnemu kontaktu, ktorý

trvá dodnes. Keď som mal 75-ku, oni prišli do Prahy, aby sme to spolu oslávili, lebo ja som mal vtedy nejaké zdravotné problémy. Aj krásnu knižku vydali pri tej príležitosti. Tá etapa, keď som učil ten prvý beh, to bolo od 75-teho do 79-teho. Potom sme to začali spracovávať a písať tú takzvanú žltú knihu, ktorá dodnes je myslím v českých a slovenských zemiach používaná pre didaktiku matematiky. Takže to bolo užitočné.

Písanie tej knihy bolo dlhé, tvorili sme ju šesť rokov, a ešte teraz mám dole v pivnici tie predchádzajúce verzie. Počítače neboli, všetko sa klepalo na papier. Klepali sme päť alebo šesť kópií, tá šiesta už bola ťažšie čitateľná, a ono to rástlo a rástlo. V tej najväčšej verzii, ktorú mám niekde uloženú dole v pivnici, je cez 1 700 strán. Po dohode s nakladateľstvom, som sa ale dozvedel, že nesmiem prekročiť 700 strán, v krajnom prípade 750. Teraz sa pozriem do tej knižky, ako sme ju prekročili. Je to 754-tá strana, ktorú teraz čítam. Pri tvorbe knižky sa vystriedalo viacero ľudí. Jednu dobu tam bol Ivan Trenčanský, inokedy tam bola tá didaktička z Prešova, ale ja ako šéf tej party, som im málo vyhovoval, lebo som veľmi nástojil na istých princípoch, na ktorých to musí stáť. Keď s tým nejako nesúhlasili, alebo sa im zdalo, že už chcem tretie, štvrté prerábanie, že je to moc, tak od toho odskočili. Tí, čo tam zostali a čo sú tam napísaní, tiež trochu hundrali, trebárs Peter Bero. Ale spätne, keď sa na to dívam, si myslím, že som urobil dobre, pretože je to viac ako tridsať rokov od vydania knižky a od tej doby nič lepšieho sa na trhu u nás neobjavilo. Vďaka tejto knižke som potom dostal pozvanie na prednášky do Kanady, a potom do Ameriky.

Vyučovanie na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského

Na doplnenie môžem povedať, že v sedemdesiatom druhom roku na kádrovaní do mňa ryli a viem, že som nesmel potom učiť didaktiku matematiky na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského. Ale neviem ako dlho. Preto ma aj trošku prekvapuje, že som vlastne v tom osemdesiatom prvom už mohol učiť. No v sedemdesiatom druhom bolo to najtvrdšie kádrovanie, v sedemdesiatom štvrtom už to bolo mäkkšie, lebo som sa dostal s našou výpravou do Nice vo Francúzsku na matematický kongres. Už to bolo so mnou lepšie, už ma pustili. No je možné, že v sedemdesiatom deviatom, v osemdesiatom som už začal učiť didaktiku matematiky. Určite som učil aj nejaké iné predmety, nejakú analytickú geometriu alebo diferenciálnu geometriu alebo niečo také. Ja ani neviem, ako sa stalo, že ma pustili učiť didaktiku. Ale podstatné bolo, že už som v tej dobe učil na základnej škole

a mohol som v rámci didaktiky matematiky rozprávať o konkrétnych príbehoch, čo sa odohrali v triede. Začínal som v sedemdesiatom piatom učiteľ piatakov a tých som potom ťahal až do ôsmej triedy. Teda piata, šiesta, siedma, ôsma. Štyri roky. Cvičenia k didaktike mi robil Peter Bero. No a Peter Bero bol v tom čase veľmi učenlivý, mladý ambiciózny muž.

Publikovanie učebnice „Teória vyučovania matematiky 2“

Učebnica „Teória vyučovania matematiky 2“ nakoniec vyšla vďaka výdatnej pomoci veľmi šikovnej redaktorky z Pedagogického nakladateľstva. Je tu obrovský zoznam ľudí, ktorí sa tak či onak na tom podieľali. V osemdesiatom prvom sme asi začali na tej knižke pracovať, v osemdesiatom siedmom sme ju dopísali. Ona potom už vyšla nejako tesne pred revolúciou. Mal som úplne jasnú koncepciu, že teda v prvej časti bude hlavná teória o pojmotvornom procese s odstraňovaním chýb, s diagnostikou, s jazykom a podobné veci. Potom pôjdu konkrétne kapitoly. Keď sa niekto pozrie teraz do obsahu tej knižky, tak to tam nájde. Teória vyučovania matematiky a jazyky matematiky, komunikácia. A potom idú množiny, logika, teda je to ešte poplatné k tomu bourbakistickému obdobiu. Ale akonáhle príde číslo, tam sa začína slovom mnohosť. O tom sme dlho diskutovali, aký to bude mať názov. Tak sme dali mnohosť. Áno, aj teraz to ešte používame. Pokrýva to aj počet, aj tú veličinu, teda anglicky „magnitude“ a „number“. Vlastne celá druhá kapitola je venovaná číslu, budovaniu predstáv čísla, zlomkom, záporným číslam. Potom je tam teoretická aritmetika, teda teória čísel. No a kam prídu algebraické výrazy? To som pôvodne mal v pláne ďalej. Ja som pred nimi mal rovnice, ale potom sa ukázalo, že bude lepšie, a to ma Peťo Bero presvedčil, dať algebraické výrazy hneď za tie číselné kapitoly. A áno, potom prišli rovnice a nerovnice. Je to akosi zovreté dvoma kritériami. Jedno je kritérium veku a druhé, trebárs algebraické výrazy, tie patria na druhý stupeň. Rovnice sa už objavujú aj na prvom stupni. A idú potom až do maturity, rovnako ako aj algebraické výrazy. A potom prišla veľká kapitola „Analýza“, ktorú si celú vzal do parády Bero. Teda samozrejme my sme o tom mnoho „diskutírovali“, ale on urobil veľmi veľa experimentov vo svojej triede a hodne našťudoval tie histórie. I keď je tam napísané, že ju robil Ľudko Hrdina alebo Peťo Bero alebo Milan Hejný, tak je treba vedieť, že to bola stále kolektívna práca. Potom ide geometria. To sú tie tri oblasti geometrie. Oblasť planimetrie, stereometrie a analytickej geometrie. Z analytickej geometrie vypadli barycentrické súradnice. Sú tam nejako, možno trochu spomenuté, ale tá metóda

barycentrických súradníc, tá tam nie je. Dá sa povedať, že tam boli úlohy viacerých typov. Základ tvorili úlohy, ktoré boli odskúšané a úspešne odskúšané, to znamená, že motivácia tých úloh bola pozitívna. Tie sú aj doložené. Ale sú tam ešte aj také úlohy, ktoré nedokladáme s reakciami detí, a cez to všetko boli prezentované rôzne kultúry. To je prvá oblasť. Druhá oblasť boli historické úlohy. Z nich niektoré boli odskúšané, ale nie všetky. Bero tam dal povedzme Archimedovo vyvažovanie, Torricelliho úvahy a tie boli len málinko odskúšané na pár žiakoch, na tých špičkových žiakoch. A vtedy sme to ešte nemali tak jasné, ako to máme jasné dnes. Síce tú tézu, že do špičkových žiakov je nutné investovať. Teraz sa to prejavuje tak, že máme v učebniciach úlohy, o ktorých sme dopredu presvedčení, že na nich dosiahne, že to bude motivovať povedzme jedno percento, resp. nie viac ako jedno percento tých žiakov. Teda v tej triede sa väčšinou nenájde nikto, kto to vypočíta, alebo sa nájde len jeden žiak. Vychádza to aj z našej súčasnej skúsenosti. Vychádza to aj z toho, že povedzme, šéf Microsoftu nemal vysokú školu, a napriek tomu urobil veľkú diery do sveta. Vieme o viacerých prípadoch ľudí, ktorí vysokú školu nemajú a urobili veľkú diery do sveta. Tú vysokú školu nemajú preto, že ich tá škola nebaví. Oni chcú ďaleko viac, ale tá škola im nič neposkytne. Učiteľ je obvykle na nižšej myšlienkovej úrovni, ako je ten žiak a on mu nemôže dávať úlohy, na ktoré sám nedovídi. Preto úlohou nás, autorov učebníc, je dať tieto úlohy. Napríklad v tej žltej knihe, je celá oblasť o tom, ako Gréci merali uhly, teda chordálu. To skoro vôbec nebolo odskúšané, ale je to smerované na tých najšpičkovejších žiakov. V tom druhom behu, čo som mal, tam sa toho chytil Martin Niepel a toho to tak mesiac bavilo. On patrí k tým špičkovým žiakom, k tomu jednému percentu. Ja som učil obidvoch. Aj otca na vysokej, Ľudovíta Niepela, a potom syna, Martina Niepela, na základnej škole. Tá chordála, chorda presnejšie, tak tou sa Martin asi mesiac zapodieval a bavilo ho to. Tá úloha je veľmi jednoduchá. Vezmem uhol jedného stupňa, a teda kruhovú výseč, ktorá má jeden stupeň. Tá výseč sa končí oblúčikom, ale ja ten oblúčik zmením na úsečku. Dĺžka tej úsečky je chorda jedného stupňa. To počítal Archimedes. S akou presnosťou a ako ju mohol spočítať? Tak znela otázka. Tam v žltej knižke, ja si to už tak nepamätám. Aby som uviedol aj niečo negatívne, lebo toto sú všetko také pozitívnejšie prípady, tak z histórie som vybral nomogramy. Tie sa mi veľmi pozdávali, pretože prepojujú vzájomne geometriu, a to aj geometriu kriviek, numerickú matematiku a nejakú kinematiku dokonca. To viem, že som si s tým dal veľkú robotu, ale deti to vôbec nebavilo. Ja som bol z toho trochu

zničený, trochu som ich do toho nanucoval, ale ich to nebavilo, tak som potom sklapol. To je tiež jedna z vecí – pasáží, ktorá bola dobre rozpracovaná. Do žltej knihy sa nedostala, lebo proste to nenašlo odozvu u detí. Ale ja sa vrátim k tým úlohám. Niektoré úlohy zo žltej knihy boli dávané ako tie, ktoré boli odskúšané. Iné úlohy, ako je povedzme tá chordála, prichádzajú z histórie matematiky. Ako ďalšiu tému sme tam dali Hippokratove mesiačky. Veľký problém bol, čo s trigonometriou, že trigonometria čiastočne patrí do geometrie rovinatej, čiastočne patrí do priestorovej ako sférická trigonometria, pretože historicky trigonometria bola vytvorená pre skúmanie sféry. Jednak našej Zeme, ale hlavne nebeskej oblohy. A také veci ako sínusová veta sférická, kosínusová veta sférická, to sa v tridsiatych rokoch minulého storočia učilo na reálnych gymnáziách. Keď si pozriete zbierky Mašek, tak tam také úlohy sú, o týchto trojuholníkoch. Je to potrebné k navigácii, a neviem k čomu všetkému ešte. Napríklad známa veta Mederlachova, ktorú my poznáme ako vetu rovinatej geometrie. Bola objavená a dokázaná najprv na sfére, a až potom stereografickou projekciou bola sprítomnená aj v rovine. Sférická geometria je v tej knižke trošku daná, lebo tá ich trochu bavila. Bavila ich na glóbuse. Prípadne sa dal veľký melón, najguľatejší a špáradlami sa do neho zapichli rôzne miesta, a robil sa trojuholník. A v žltej knižke myslím, že je slávna Eulerova veta o tom, že obsah sférického trojuholníka je súčet jeho uhlov mínus „ π “. Túto vetu, ktorú dve storočia dokazovali matematici, nakoniec veľmi elegantne dokázal Euler a ten dôkaz, ten sme do knihy dali. To sú tie historické veci. Potom, nie veľa, ale sú tam zmienky o tom, že niektoré deti potrebujú tie jednotlivé skúsenosti, aby ich mali veľa. Vtedy sme to nazývali separované modely, dnes sa to volá izolované modely. Aby decká mali veľa tých skúseností, a až na ich základe sú schopné si vytvoriť pravidlo, ako sa to vlastne robí. Tak o tomto je tam tiež reč a sú tam ukázané úlohy. V tej dobe sme ešte nemali termín, ktorý máme teraz – gradované série úloh. Gradovanou sériou úloh rozumieme takú postupnosť úloh, že tá nasledujúca je vždy trošku náročnejšia ako bola predchádzajúca, a tá posledná odhalí nejakú zákonitosť. Ako deti privedieme k tomu, aby objavili distributívny zákon? Ako žiakov privedieme k tomu, aby odhalili kritérium pre deliteľnosť deviatimi? No teraz sa to všetko robí cez tie gradované série úloh. Vtedy sme to tušili, tak sme to aj robili, ale teóriu gradovaných úloh sme nemali. Jej podstata je v tom, že na začiatok tie prvé úlohy vyrieši v podstate každý žiak. Dajme tomu, že tá séria úloh obsahuje dvanásť kusov. Ten šikovný žiak pozrie na prvú úlohu, mávne rukou a skočí

hneď na šiestu, tú rýchlo vyrieši, skočí na ôsmu. Tak tam začne potom pracovať. Ten slabý žiak začína od prvej ide na druhú, ide na tretiu a tak ďalej. Takže vlastne obaja, aj ten silný a aj ten slabý, idú v tej istej koľaji, ale v iných miestach a inou rýchlosťou. Je tam zmienka aj o tých úlohách pre slabých žiakov. No a potom v neposlednej rade, už vtedy nám bolo jasné, že je treba vzdelávať aj našich učiteľov. Nerobili sme si ilúzie, že budeme vzdelávať všetkých učiteľov, ale poznali sme niekoľkých učiteľov, teraz si spomínam Banská Bystrica, Zvolen, Žarnovica, Kežmarok. Spomínam si na tých učiteľov, keď už mali nejaké prednášky, tak to bolo tak, že: *„Prosím Vás, pán docent, ja mám dvoch veľmi šikovných žiakov a neviem, aké úlohy im mám dať.“* Boli to úlohy akože pre tých žiakov a ten učiteľ občas, keď ešte neboli tieto všelijaké komunikačné vymoženosti ako dnes, tak mi napísal list: *„Pán Hejný, ďakujem Vám za tie úlohy, nie len pre tých žiakov, ale aj mne to urobilo radosť.“* Neraz sa stalo, že ten dotyčný učiteľ priložil aj svoju úlohu, ktorú k tomu nejako vymyslel. Takže sa nám zdalo, že aj táto osvetová práca priamo medzi učiteľmi mala svoj dopad. Teraz to robíme úplne systematicky, že v našich príručkách pre učiteľov zaraďujeme také úlohy, ktoré sú formulované pre vašich najšikovnejších žiakov, pre tých expertov. Ale presne to isté, čo vtedy na Slovensku, tak aj teraz mi mnohí tí učelia, naši lektori povedia: *„Joj, to bola pekná úloha, tak som sa s ňou natrápila“*. Potom ale učiteľka z prvého stupňa povie: *„A potom som s ňou potrápila svoju kolegyňu z druhého stupňa.“* Tá učiteľka z prvého stupňa mala radosť, že prinesie tej učiteľke z druhého stupňa niečo, čo nie je pre ňu úplne jednoduché. To, čo tam nebolo vtedy, a na čom teraz pracujeme, sú úlohy pre rodičov. Tie v žltej knihe nie sú. Rovnako v žltej knihe nie je „materinka“, sú tam niektoré veci, o decku v predškolskom veku, nejaké tie myšlienky sú, ale nie je tam systematika. Tak to sú teraz nové veci, na ktorých naše tímy ľudí pracujú. Záverom môžem povedať, že pri tvorbe teórie generických modelov (TGM) v prvej fáze mi iste otec to všetko ukázal. Ale ja sám som si z jeho popudu čítal Vygotského, Leontieva, Gaľperina, Piageta, Inhelderovú, že teda učil som sa.